MATURZYSTO!

Część IV – równania i nierówności wielomianowe
(stopnia wyższego niż drugi).

Rozwiąż je samodzielnie, a potem, jeśli chcesz, sprawdź rozwiązania i porównaj wyniki.

POWODZENIA!

Zadania powtórzeniowe przygotowała:
mgr Dorota Nawrocka
nauczycielka matematyki
Zespołu Szkół Technicznych i Ogólnokształcących
we Wrześni.

POWTÓRZ!

1. Wzory skróconego mnożenia.
2. Rozkład wielomianu na czynniki (różne sposoby).
3. Dzielenie wielomianów.
4. Twierdzenie Bezouta.
5. Twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu.
6. Siatka znaków lub fala (wężyk).
7. Schemat Hornera, (jeśli znałeś).

ZADANIA DO ROZWIĄZANIA:

1. $2x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$
2. $16x^4 - 16x^2 = 0$
3. $x^3 + 2x^2 - 3x - 10 \rangle 0$
4. $x^4 - 3x^3 + x - 3 \langle 0$
5. $2x^4 - 20x^2 + 18 = 0$
6. $x^6 + x^4 - 2x^2 \geq 0$
7. $(-x^2 + 4)(x^2 - 9)(x^2 - 2x + 1) \leq 0$
8. $-x^4 + 13x^2 - 36 = 0$

ROZWIĄZANIA:

IV_1

$$2x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = 0$$

$$2(x^3 - 1) - 3(x^2 - x) = 0$$

$$2(x-1)(x^2 + x + 1) - 3x(x-1) = 0$$

$$(x-1)\left[2(x^2 + x + 1) - 3x\right] = 0$$

$x = 1$ lub $2x^2 + 2x + 2 - 3x = 0$

$$2x^2 - x + 2 = 0$$

$$a = 2 \quad b = -1 \quad c = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 1 - 16 = -15$$

$$\Delta \rangle 0 \Rightarrow \textit{brak pierwiastków}$$

Odp. Rozwiązaniem równania jest x =1.

IV_2

$$16x^4 - 16x^2 = 0$$

$$16x^2(x^2 - 1) = 0$$

$16x^2 = 0$ lub $x^2 - 1 = 0$

$x = 0$ $\quad (x-1)(x+1) = 0$

pierw.dwukrotny $\quad x = 1$ lub $x = -1$

Odp. Rozwiązaniem równania jest $x \in \{-1, 0, 1\}$.

IV_3

$$x^3 + 2x^2 - 3x - 10 \rangle 0$$

tworzę wielomian $W(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 10$

$$p_{-10} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$$

$$q_1 = \{\pm 1\}$$

$$\frac{p}{q} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10\}$$

twierdzenie o wymiernych pierwiastkach wielomianu

W(1) =1+ 2- 3- 10$\neq$ 0
W(2) = 8+ 8- 6- 10= 0   zatem x = 2 jest jednym z pierwiastków
Należy wykonać dzielenie wielomianu przez dwumian

$(\ x^3 + 2x^2 - 3x - 10) : (x-2) = x^2 + 4x + 5$

$-x^3 + 2x^2$

$= \qquad 4x^2 - 3x - 10$

$\qquad -4x^2 + 8x$

$\qquad\qquad = \qquad 5x - 10$

$\qquad\qquad\qquad -5x + 10$

$\qquad\qquad\qquad = \quad =$

$x^3 + 2x^2 - 3x - 10 \rangle 0$

$(x-2)(x^2 + 4x + 5) \rangle 0$

obliczam pierwiastki i rysuję falę

$x - 2 = 0$ lub $x^2 + 4x + 5 = 0$

$x = 2 \qquad a = 1 \ \ b = 4 \ \ c = 5$

$\Delta = b^2 - 4ac$

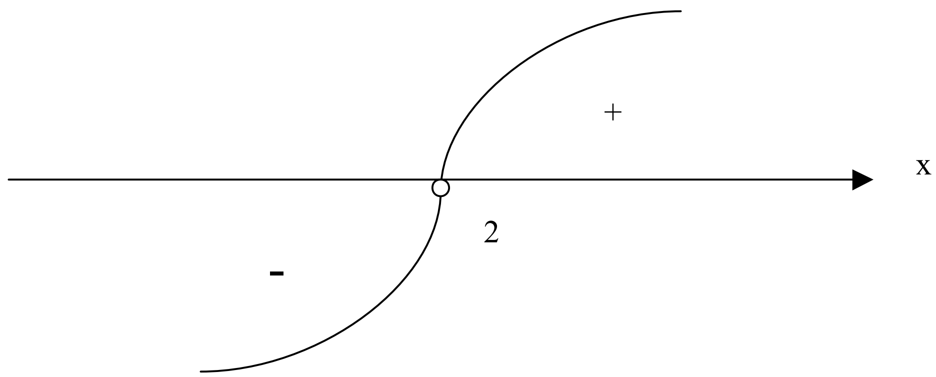
$\Delta = 16 - 20 = -4$

$\Delta \langle 0$ *brak pierwiastków*

$a \rangle 0 \Rightarrow$ *ramiona paraboli skierowane w górę*

zatem $x^2 + 4x + 5 \rangle 0 -$ *zawsze dodatnie* $\forall x \in R$

fala



lub siatka znaków (wg uznania)

x	-∞	2	∞
$x-2$	-	0	+
$x^2 + 4x + 5$	+	+	+
$x^3 + 2x^2 - 3x - 10 \rangle 0$ $(x-2)(x^2 + 4x + 5) \rangle 0$	-	0	+

Odp. $x^3 + 2x^2 - 3x - 10 \rangle 0 \Leftrightarrow x \in (2, \infty)$

IV$_4$

$x^4 - 3x^3 + x - 3 \langle 0$

$x^3(x-3) + (x-3) \langle 0$

$(x-3)(x^3+1) \langle 0$

$(x-3)(x+1)(x^2-x+1) \langle 0$

obliczam miejsca zerowe i rysuję falę

$x-3=0$ lub $x+1=0$ lub $x^2-x+1=0$

$x=3$ lub $x=-1$ lub $a=1\ \ b=-1\ \ c=1$

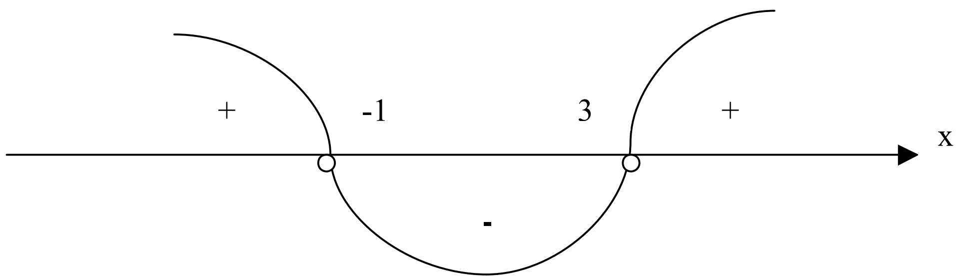
$\Delta = 1-4=-3$

$\Delta \langle 0 \Rightarrow$ *brak pierwiastków*

$a \rangle 0 \Rightarrow$ *ramiona paraboli skierowane w górę*

zatem $x^2-x+1 \rangle 0$ *zawsze dodatnie* $\forall x \in R$

fala



Odp. $x^4 - 3x^3 + x - 3 \langle 0 \Leftrightarrow x \in (-1,3)$

IV_5

$2x^4 - 20x^2 + 18 = 0 \quad / : 2$

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

podstawienie $x^2 = t$

$t^2 - 10t + 9 = 0$

$a = 1 \quad b = -10 \quad c = 9$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\Delta = 100 - 36 = 64$

$\sqrt{\Delta} = 8$

$t_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad t_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$t_1 = 1 \qquad t_2 = 9$

wracamy do podstawienia

$x^2 = t$

$x^2 = 1$ lub $x^2 = 9$

$x^2 - 1 = 0$ lub $x^2 - 9 = 0$

$(x-1)(x+1) = 0$ lub $(x-3)(x+3) = 0$

$x = 1$ lub $x = -1$ lub $x = 3$ lub $x = -3$

Odp. Rozwiązaniem równania są liczby $x \in \{-3, -1, 1, 3\}$

IV_6

$x^6 + x^4 - 2x^2 \geq 0$

$x^2(x^4 + x^2 - 2) \geq 0$

obliczam pierwiastki

$x^2 = 0$ lub $x^4 + x^2 - 2 = 0$

$x = 0$ lub $x^2 = t$

$\uparrow$ $\qquad t^2 + t - 2 = 0$

pierwiastek dwukrotny $\qquad \Delta = 9$

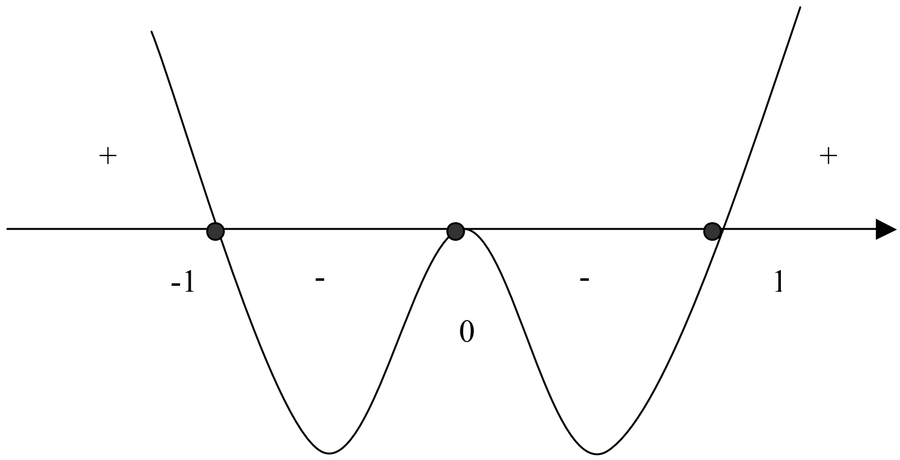
$\sqrt{\Delta} = 3$

$t_1 = -2$ lub $t_2 = 1$

$x^2 = -2$ lub $x^2 = 1$

$\downarrow$ lub $(x-1)(x+1) = 0$

brak pierwiastków lub $x = 1$ lub $x = -1$



Odp. $x^6 + x^4 - 2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, \infty)$

IV_7

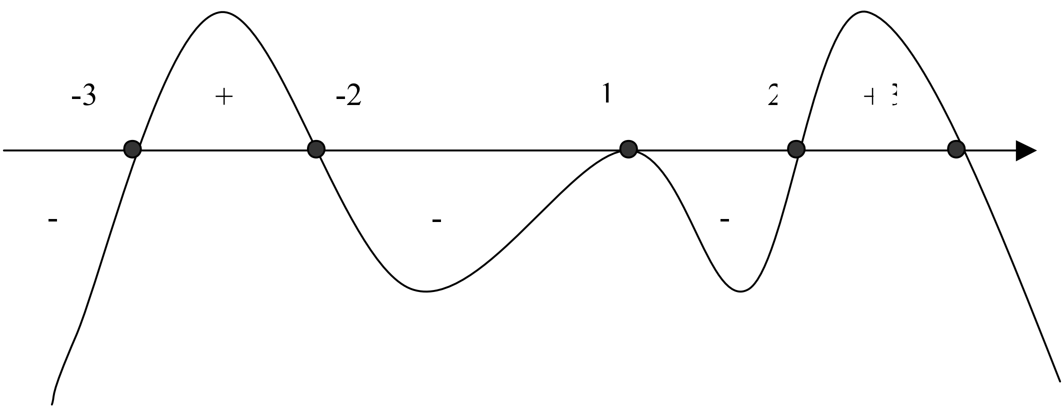
$(-x^2 + 4)(x^2 - 9)(x^2 - 2x + 1) \leq 0$

$-(x-2)(x+2)(x-3)(x+3)(x-1)^2 \leq 0$

$x = 2$ lub $x = -2$ lub $x = 3$ lub $x = -3$ lub $x = 1$

$\downarrow$

pierwiastek dwukrotny



Odp. $x \in \left(-\infty,-3\right] \cup \left[-2,2\right] \cup \left[3,\infty\right)$

IV_8

$$-x^4 + 13x^2 - 36 = 0$$

$$p_{-36} = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36\}$$

$$q_{-1} = \{\pm 1\}$$

$$\frac{p}{q} = p$$

Przy rozwiązaniu wykorzystam **schemat Hornera** (tabelę rozwinęłam o kolumnę, w której znalazł się rozkład na czynniki - lewej strony równania, będzie to wykorzystane dalej).

pierwiastek x ↓						czynnik↓	rozkład na czynniki↓
	-1	0	13	0	-36		$(-x^4 + 13x^2 - 36)$
x=2	-1	-2	9	18	0	(x-2)	$(x-2)(-x^3 - 2x^2 + 9x + 18)$
x=-2	-1	0	9	0	-	(x+2)	$(x-2)(x+2)(-x^2 + 9)$
x=3	-1	-3	0	-	-	(x-3)	$(x-2)(x+2)(x-3)(-x-3)$

$-x^4 + 13x^2 - 36 = 0$

$(x-2)(x+2)(x-3)(-x-3) = 0$

zatem

$x = 2$ lub $x = -2$ lub $x = 3$ lub $x = -3$

Odp. Rozwiązaniem równania jest $x \in \{-3, -2, 2, 3\}$
