MATURZYSTO!

Część VII - równania i nierówności logarytmiczne.

Rozwiąż je samodzielnie, a potem, jeśli chcesz, porównaj wyniki.

1. $\log_2 16 = x$
2. $\log_{27} 3 \geq x$
3. $\log_{16} x = -\frac{1}{4}$
4. $\log_9 x \leq \frac{1}{2}$
5. $\log_x 64 = 3$
6. $\log_x 8 \geq \frac{1}{2}$
7. $\log_2 (x+1) \rangle 3$
8. $\log_{\frac{1}{2}} (2x-5) \langle -4$
9. $\log(3x+4) + \log(x+8) = 2$
10. $\log(3x-91) - \log(30-x) = 1$
11. $\log_2 (x+1) + \log_2 (x-1) \leq 2$
12. $\log_4 \{2\log_3 [1 + \log_2 (1 + \log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$

POWODZENIA!

Zadania powtórzeniowe przygotowała:
mgr Dorota Nawrocka
nauczycielka matematyki
Zespołu Szkół Technicznych i Ogólnokształcących
we Wrześni.

Przypomnij sobie i zapamiętaj!

- Definicję logarytmu.
- Własności logarytmów.
- Co to jest dziedzina?
- Jaki to logarytm dziesiętny?
- Jak wygląda wykres i własności funkcji logarytmicznej?
- Jak rozwiązujemy równanie, a jak nierówność logarytmiczną? Kiedy zmieniamy znak nierówności, a kiedy nie?
- Jak rozwiązujemy równania, a jak nierówności wykładnicze?
- Działania na potęgach- WZORY!

ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Zadanie 1

$\log_2 16 = x \Leftrightarrow 2^x = 16$ $2^x = 2^4$ $x = 4 \in D$	$D - Dziedzina$ $D : x \in R$
Odp. Rozwiązaniem równania jest $x = 4$	

Zadanie 2

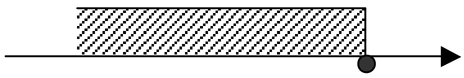
$$\log_{27} 3 \geq x \Leftrightarrow \log_{27} 3 \geq \log_{27} 27^x$$

$$3 \geq 27^x$$

$$3 \geq 3^{3x}$$

$$1 \geq 3x \,/ : 3$$

$$x \leq \frac{1}{3}$$



$x \in \left(-\infty, \frac{1}{3} \right]$

Dziedzina

$D : x \in R$

Po zestawieniu z dziedziną:

Odp. Rozwiązaniem nierówności jest przedział $x \in \left(-\infty, \frac{1}{3} \right]$.

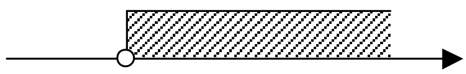
Zadanie 3

$$\log_{16} x = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 16^{-\frac{1}{4}} = x$$

$$x = \frac{1}{2} \in D$$

$Zal : x > 0$

$D : x \in (0, \infty)$



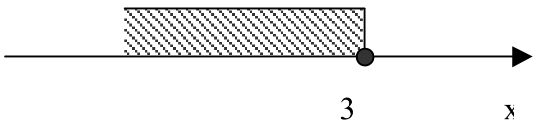
Odp. Rozwiązaniem równania jest $x = \frac{1}{2}$

Zadanie 4

$$\log_9 x \le \frac{1}{2}$$

$$\log_9 x \le \log_9 9^{\frac{1}{2}}$$

$$x \le 3$$

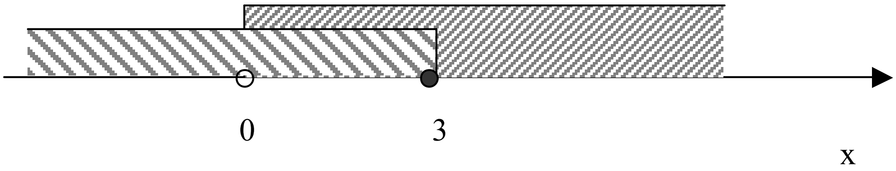


$$x \in \left(-\infty, 3\right]$$

$$Zal: x > 0$$

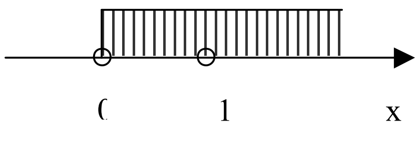
$$D: x \in \left(0, \infty\right)$$

Zestawienie wyników:



Odp. Rozwiązaniem nierówności jest $x \in (0,3]$.

Zadanie 5

$\log_x 64 = 3$ $x^3 = 64$ $x^3 = 4^3$ $x = 4 \in D$	$Zal: x \neq 1 \quad i \quad x \rangle 0$ $D: x \in (0,1) \cup (1,\infty)$ 
Odp. Rozwiązaniem równania jest $x = 4$	

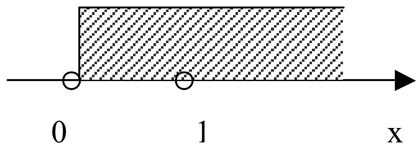
Zadanie 6

$\log_x 8 \geq \dfrac{1}{2}$

$\log_x 8 \geq \log_x x^{\frac{1}{2}}$

$zal: x \neq 1 \;\; i \;\; x \rangle 0$

$D: x \in (0,1) \cup (1,\infty)$



Nierówność rozwiązujemy w dwóch przypadkach (ze względu na zmianę znaku):

1.

$x \in (0,1)$

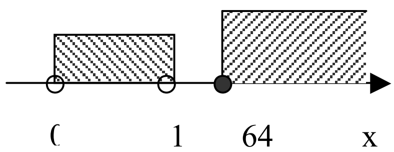
$\log_x 8 \geq \log_x x^{\frac{1}{2}}$

$8 \leq x^{\frac{1}{2}}$

$x^{\frac{1}{2}} \geq 8$

$x^{\frac{1}{2}} \geq 64^{\frac{1}{2}}$

$x \geq 64$



$x \in \varnothing$

2.

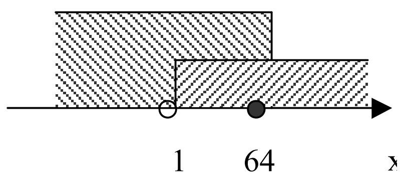
$x \in (1,\infty)$

$\log_x 8 \geq \log_x x^{\frac{1}{2}}$

$8 \geq x^{\frac{1}{2}}$

$x^{\frac{1}{2}} \leq 64^{\frac{1}{2}}$

$x \leq 64$



$x \in (1,64]$

Odp. Rozwiązaniem nierówności jest przedział : $x \in (1, 64]$

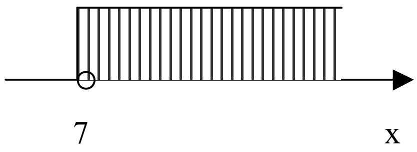
Zadanie 7

$\log_2(x+1)\rangle 3$

$\log_2(x+1)\rangle \log_2 2^3$

$x+1\rangle 8$

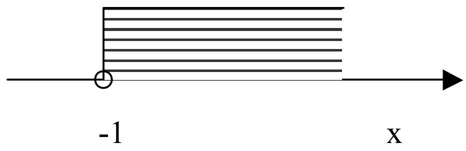
$x\rangle 7$



$x \in (7,\infty)$

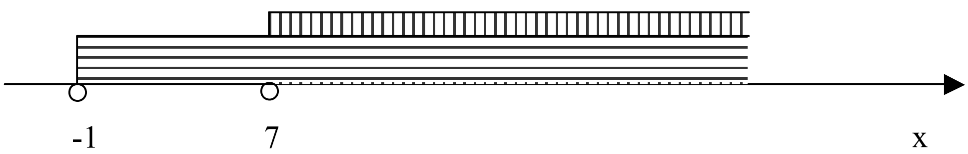
$Zal: x+1>0$

$x>-1$



$D: x \in (-1,$

Zestawienie wyników:



Odp. $x \in (7,$

Zadanie 8

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-5)\langle -4$$

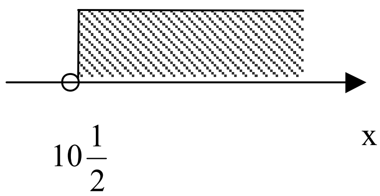
$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-5)\langle \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$$

$$2x-5\rangle 2^4$$

$$2x-5\rangle 16$$

$$2x\rangle 21/:2$$

$$x\rangle 10\frac{1}{2}$$

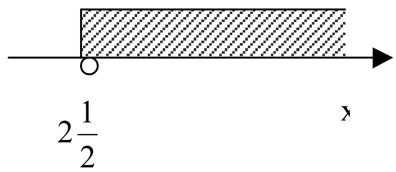


$$x\in\left(10\frac{1}{2},\infty\right)$$

$$zal: 2x-5>0$$

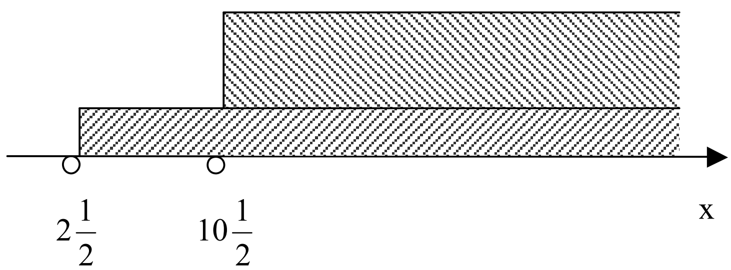
$$2x>5/:2$$

$$x>2\frac{1}{2}$$



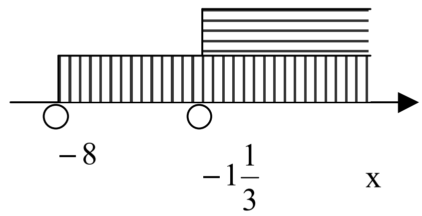
$$D: x\in\left(2\frac{1}{2},\infty\right)$$

Zestawienie wyników:

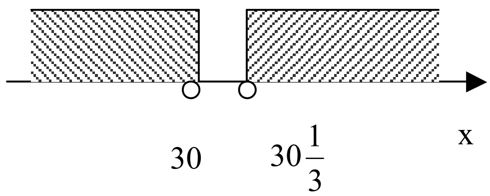


Odp. $x\in\left(10\frac{1}{2},\infty\right)$

Zadanie 9

$\log(3x+4)+\log(x+8)=2$ $\log(3x+4)(x+8)=\log 10^2$ $3x^2+24x+4x+32=100$ $3x^2+28x-68=0$ $\Delta=b^2-4ac$ $\Delta=28^2-12(-68)$ $\Delta=784+816$ $\Delta=1600$ $\sqrt{\Delta}=40$ $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-28-40}{6}=-11\frac{1}{3}\notin D$ $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-28+40}{6}=2\in D$	$Zal: 3x+4>0 \;\; i \;\; x+8>0$ $3x>-4/:3 \qquad x>-8$ $x>-\frac{4}{3}$ $x>-1\frac{1}{3}$  $D: x\in\left(-1\frac{1}{3},\infty\right)$
Odp. Rozwiązaniem równania jest $x=2$	

Zadanie 10

$\log(3x-91)-\log(30-x)=1 \rightarrow$	$Zal: 3x-91>0 \;\; i \;\; 30-x>0$ $3x>91/:3 \qquad -x>-30/\cdot(-1)$ $x>30\frac{1}{3} \qquad x<30$  $D: x\in\varnothing$ $\Downarrow$
Odp.Brak rozwiązania.	

Zadanie 11

$\log_2(x+1)+\log_2(x-1)\le 2$

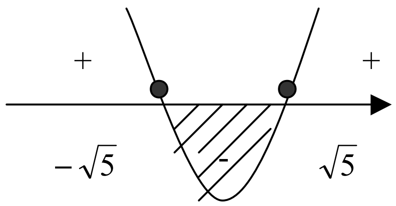
$\log_2(x+1)(x-1)\le \log_2 2^2$

$x^2-1\le 4$

$x^2-5\le 0$

$\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)\le 0$

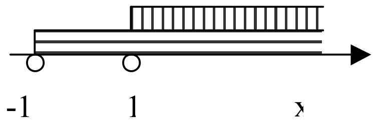
$x=\sqrt{5}$ lub $x=-\sqrt{5}$



$x\in\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]$

$Zal: x+1>0 \quad i \quad x-1>0$

$x>-1 \qquad x>1$

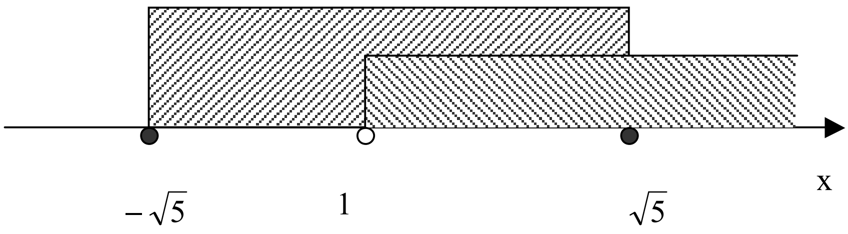


$D: x\in(1,\infty)$

Zestawienie wyników:

$$x\in\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right] \quad i \quad x\in(1,\infty)$$

$\downarrow$



Odp. $x \in (1, \sqrt{5}]$

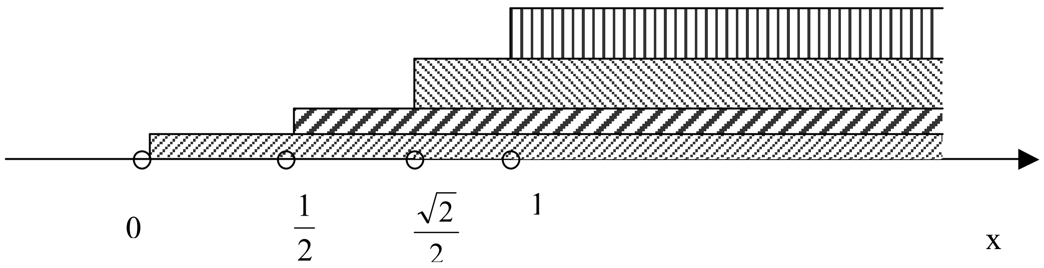
Zadanie 12

$$\log_4\{2\log_3[1+\log_2(1+\log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$$

Określam dziedzinę $\downarrow$

założenia:

$x \rangle 0$	$1+\log_2 x \rangle 0$ $\log_2 x \rangle -1$ $\log_2 x \rangle \log_2 2^{-1}$ $x \rangle \frac{1}{2}$	$1+\log_2(1+\log_2 x) \rangle 0$ $\log_2(1+\log_2 x) \rangle \log_2 2^{-1}$ $1+\log_2 x \rangle \frac{1}{2}$ $\log_2 x \rangle -\frac{1}{2}$ $\log_2 x \rangle \log_2 2^{-\frac{1}{2}}$ $x \rangle \frac{1}{\sqrt{2}}$ $x \rangle \frac{\sqrt{2}}{2}$	$2\log_3[1+\log_2(1+\log_2 x)] \rangle 0 / :2$ $\log_3[1+\log_2(1+\log_2 x)] \rangle \log_3 3^0$ $1+\log_2(1+\log_2 x) \rangle 1$ $\log_2(1+\log_2 x) \rangle 0$ $\log_2(1+\log_2 x) \rangle \log_2 2^0$ $1+\log_2 x \rangle 1$ $\log_2 x \rangle \log_2 2^0$ $x \rangle 1$



$D : x \in (1, \infty)$

Rozwiązanie:

$$\log_4\{2\log_3[1+\log_2(1+\log_2 x)]\} = \frac{1}{2}$$

$$\log_4\{2\log_3[1+\log_2(1+\log_2 x)]\} = \log_4 4^{\frac{1}{2}}$$

$$2\log_3[1+\log_2(1+\log_2 x)] = 2 / : 2$$

$$\log_3[1+\log_2(1+\log_2 x)] = \log_3 3^1$$

$$1+\log_2(1+\log_2 x) = 3$$

$$\log_2(1+\log_2 x) = 2$$

$$\log_2(1+\log_2 x) = \log_2 2^2$$

$$1+\log_2 x = 4$$

$$\log_2 x = 3$$

$$\log_2 x = \log_2 2^3$$

$$x = 8 \in D$$

Odp. Rozwiązaniem równania jest x=8.