Materiały pomocnicze dla **koła matematycznego** w szkole gimnazjalnej

Zadania z **dowodzenia** nierówności z różnych przyczyn pomijane w programach szkoły gimnazjalnej pojawiają się na zawodach i olimpiadach matematycznych coraz częściej i słusznie. Zadania tego typu ćwiczą przede wszystkim **dedukcyjny sposób myślenia**, tak ważny w **matematyce** nawet tej **elementarnej**. Do rozwiązywania tego typu zadań może być potrzebna znajomość takich faktów, jak: **twierdzenia o nierównościach równoważnych**, **zasady mnożenia sum algebraicznych** oraz **wzory skróconego mnożenia, nieujemność kwadratu dowolnej liczby rzeczywistej, nieujemność sumy kwadratów dowolnie wielu liczb**.

Podstawowe nierówności.

Nierówność I.

Dla dowolnych liczb rzeczywistych M i N zachodzi nierówność postaci

(1) $M^2 + N^2 \geq 2 \cdot M \cdot N.$

Dowód.

Metoda 1.

Korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń

$(M - N)^2 = M^2 - 2 \cdot M \cdot N + N^2$

otrzymujemy $M^2 + N^2 = (M - N)^2 + 2 \cdot M \cdot N \geq 2 \cdot M \cdot N$, bo $(M - N)^2$ jest liczbą nieujemną.

Metoda 2.

Startując z nierówności (1) i przenosząc wyrażenie z prawej strony na lewą otrzymujemy nierówność postaci $M^2 - 2 \cdot M \cdot N + N^2 = (M - N)^2 \geq 0$, ze wzoru na kwadrat różnicy. Zatem dowód zakończony gdyż kwadrat dowolnej liczby jest liczbą nieujemną.

Nierówność II.

Dla dowolnych liczb dodatnich P i Q zachodzi nierówność postaci

(2) $\frac{P}{Q} + \frac{Q}{P} \geq 2.$

Dowód.

Sprowadzając lewą stronę nierówności do wspólnego mianownika otrzymujemy nierówność równoważną postaci:

$\frac{P}{Q} + \frac{Q}{P} = \frac{P^2 + Q^2}{P \cdot Q} \geq 2$, mnożąc obustronnie przez mianownik otrzymujemy

$P^2 + Q^2 \geq 2 \cdot P \cdot Q$, przenosząc wyrażenie z prawej strony na lewą i korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń otrzymujemy nierówność równoważną postaci

$(P - Q)^2 \geq 0$ prawdziwą dla dowolnych P i Q więc dla P i Q dodatnich też.

Nierówność III.

Średnia geometryczna dwóch liczb dodatnich jest nie większa od **średniej arytmetycznej** tych liczb.

Dowód.

Chcemy pokazać, że dla dowolnych liczb dodatnich X i Y zachodzi nierówność postaci:

$\frac{X + Y}{2} \geq \sqrt{X \cdot Y}.$

Mnożąc obustronnie nierówność przez (2) otrzymujemy równoważną nierówność postaci

(3) $X + Y \geq 2 \cdot \sqrt{X \cdot Y},$

podnosząc (3) obustronnie do kwadratu i przenosząc wyrażenie z prawej na lewą stronę otrzymujemy

$(X + Y)^2 - 4 \cdot X \cdot Y \geq 0$, stosując kolejno wzór na kwadrat sumy i różnicy dwóch wyrażeń otrzymujemy nierówność równoważną $(X - Y)^2 \geq 0$ prawdziwą dla dowolnych liczb rzeczywistych więc dla dodatnich również.

Przykłady dowodzenia.

Niech x, y i z będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Przykład 1.

Wykazać nierówność

$2 \cdot x^2 + y^2 + z^2 \geq 2 \cdot (y+z) \cdot x.$

Dowód.

Lewa strona nierówności jest niemniejsza od prawej, bo

$2 \cdot x^2 + y^2 + z^2 = (x^2 + y^2) + (x^2 + z^2) \geq 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x \cdot z = 2 \cdot x \cdot (y+z) = 2 \cdot (y+z) \cdot x,$ na mocy wzoru (1).

Przykład 2.

Udowodnij nierówność

(4) $x^2 + y^2 + z^2 \geq x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x.$

<u>Metoda 1.</u>

Z nierówności (1) mamy

$$x^2 + y^2 \geq 2 \cdot x \cdot y$$
$$y^2 + z^2 \geq 2 \cdot y \cdot z$$
$$z^2 + x^2 \geq 2 \cdot z \cdot x,$$

stąd po dodaniu stronami otrzymujemy

$2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot z^2 \geq 2 \cdot (x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x)$, dzieląc obustronnie przez liczbę 2 otrzymujemy nierówność wyjściową.

<u>Metoda 2.</u>

Mnożąc obustronnie nierówność (4) przez liczbę 2 otrzymujemy

$2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot z^2 \geq 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y \cdot z + 2 \cdot z \cdot x,$

przenosząc co się da na lewą stronę nierówności i korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy otrzymujemy

$$(x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2) + (y^2 - 2 \cdot y \cdot z + z^2) + (z^2 - 2 \cdot z \cdot x + x^2)$$
$$= (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0,$$

co kończy dowód.

Komentarz: Kwadrat dowolnej liczby jest liczbą nieujemną, a suma liczb nieujemnych też jest nieujemna.

Przykład 3.

Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich p i q zachodzi nierówność

$$(p+q) \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) \geq 4.$$

Dowód.

$$(p+q) \cdot \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) = \frac{p+q}{p} + \frac{p+q}{q} = \frac{p}{p} + \frac{q}{p} + \frac{p}{q} + \frac{q}{q} =$$ na mocy na wzoru wcześniej

$$= \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) + 2 \geq 2 + 2 = 4,$$

uzasadnionego (2).

Przykład 4.

Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich p, q, r zachodzi nierówność postaci $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} \geq \frac{9}{p+q+r}$. Kiedy zachodzi równość ?

Dowód.
Pomnóżmy obustronnie przez mianownik prawej strony nierówności. Wówczas otrzymamy nierówność równoważną

$(p+q+r)\cdot(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r})\geq 9,$ którą mamy uzasadnić.

Badamy lewą stronę

$$(p+q+r)\cdot(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r})=\frac{p+q+r}{p}+\frac{p+q+r}{q}+\frac{p+q+r}{r}=1+\frac{q}{p}+\frac{r}{p}+\frac{p}{q}+1+\frac{r}{q}+\frac{p}{r}+\frac{q}{r}+1\geq 3+6=9,$$

bo $\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\geq 2,\quad \frac{p}{r}+\frac{r}{p}\geq 2,\quad \frac{q}{r}+\frac{r}{q}\geq 2$ na mocy (2).

Przykład 5.
Korzystając z nierówności (3) udowodnić nierówność postaci

$\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{a\cdot b\cdot c\cdot d}$, dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich.

Dowód.
Mamy pokazać prawdziwość nierówności równoważnej postaci

(4) $a+b+c+d\geq 4\cdot\sqrt[4]{a\cdot b\cdot c\cdot d}.$

$$a+b+c+d\geq 2\cdot\sqrt{a\cdot b}+2\cdot\sqrt{c\cdot d}=2\cdot(\sqrt{a\cdot b}+\sqrt{c\cdot d})\geq 2\cdot 2\sqrt{\sqrt{a\cdot b}\cdot\sqrt{c\cdot d}}=4\cdot((a\cdot b\cdot c\cdot d)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$$

po dwukrotnym zastosowaniu nierówności (3) i z własności iloczynu pierwiastków stopnia 2.
Z własności potęgi oraz notacji pierwiastka stopnia 4 otrzymujemy nierówność

$$a+b+c+d\geq 4\cdot(a\cdot b\cdot c\cdot d)^{\frac{1}{4}}=4\cdot\sqrt[4]{a\cdot b\cdot c\cdot d}.$$

Przykład 6.
Uzasadnij, że bezpośrednim wnioskiem z nierówności (4) jest nierówność postaci

(5) $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c},$ prawdziwa dla dowolnych trzech liczb rzeczywistych a, b, c dodatnich.

Dowód.
Podstawmy w nierówności (4) $d=\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}$. Wtedy nierówność ta przyjmie postać

$a+b+c+\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}\geq 4\cdot\sqrt{a\cdot b\cdot c\cdot\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}}$, z własności potęgi oraz iloczynu potęg mamy

$$a+b+c\geq 4\cdot\sqrt[4]{a\cdot b\cdot c\cdot(a\cdot b\cdot c)^{\frac{1}{3}}}-\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}=4\cdot(a^{\frac{4}{3}}\cdot b^{\frac{4}{3}}\cdot c^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{4}}-\sqrt{a\cdot b\cdot c}=4\cdot\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}-\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c},$$

zatem $a+b+c\geq 3\cdot\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}\Rightarrow\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}.$

Uwagi:

Wyrażenie postaci $\sqrt{a\cdot b}$ nazywamy średnią geometryczną dwóch nieujemnych liczb.

Wyrażenie postaci $\frac{a+b}{2}$ nazywamy średnią arytmetyczną dwóch nieujemnych liczb.

Wyrażenie postaci $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ nazywamy średnią harmoniczną dwóch dodatnich liczb.

Przykład 7.
Uzasadnić, że zachodzi podwójna nierówność postaci

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{a\cdot b} \le \frac{a+b}{2}.$$

Najpierw udowodnimy, że średnia geometryczna jest niewiększa od średniej arytmetycznej. W drugiej części dowodu pokażemy, że średnia harmoniczna jest niewiększa od średniej geometrycznej.
Dowód.
(*)
Niech a i b oznaczają dowolne liczby nieujemne. Ze wzoru na **kwadrat różnicy** otrzymujemy

$$0 \le (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 = a+b-2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \Rightarrow 2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \le a+b \Rightarrow 2\cdot\sqrt{a\cdot b} \le a+b$$

$$\Rightarrow \sqrt{a\cdot b} \le \frac{a+b}{2}.$$

(*)
Załóżmy teraz, że a i b są dodatnie oraz zachodzi nierówność postaci $\sqrt{a\cdot b} \le \frac{a+b}{2}$, stąd otrzymujemy następujący ciąg nierówności

$$\sqrt{\frac{a^2\cdot b^2}{a\cdot b}} \le \frac{a+b}{2} \Rightarrow \frac{a\cdot b}{\sqrt{a\cdot b}} \le \frac{a+b}{2} \Rightarrow 2\cdot a\cdot b \le (a+b)\cdot\sqrt{a\cdot b}$$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot a\cdot b}{a+b} \le \sqrt{a\cdot b} \Rightarrow \frac{2}{\frac{a+b}{a\cdot b}} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{a\cdot b}.$$

Przykład 8.
Spośród wszystkich prostokątów o danym obwodzie wyznaczyć prostokąt mający największe pole.
Rozwiązanie:
Niech 2a będzie danym obwodem prostokąta. Chcemy aby zmienne pole tego prostokąta xy było jak największe. Oznaczmy średnią arytmetyczną wielkości dodatnich x i y przez m, zaś przez d oznaczmy średnią arytmetyczną wielkości x i –y. Wtedy możemy zapisać układ równań prosty do rozwiązania. Po dodaniu stronami otrzymujemy

$$\begin{matrix} m = \frac{x+y}{2} \\ d = \frac{x-y}{2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x+y = 2\cdot m \\ x-y = 2\cdot d \end{matrix} \Rightarrow 2\cdot x = 2\cdot m + 2\cdot d$$

$$\Rightarrow x = m+d \wedge y = m-d.$$

Zatem pole prostokąta wynosi

$$x\cdot y = (m+d)\cdot(m-d) = m^2-d^2 = \frac{(x+y)^2}{4} - d^2.$$

Ponieważ $d^2 > 0$ poza przypadkiem gdy d=0 więc otrzymujemy stąd nierówność postaci

$x\cdot y \le \frac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow \sqrt{x\cdot y} \le \frac{x+y}{2}$, przy czym $\sqrt{x\cdot y} = \frac{x+y}{2}$ gdy d=0 i x=y=m.

Wobec tego, że x+y=a wynika że pole xy przyjmuje wartość maksymalną $\frac{a^2}{4}$, gdy x=y=$\frac{a}{2}$, czyli dla kwadratu. Jednocześnie udowodniliśmy, że $\sqrt{S_{\max}} \leq \frac{x+y}{2}$, czyli wzór (3), dla x, y przyjmujących wartości dodatnie.

Wniosek (własność dla minimum):

Spośród wszystkich prostokątów o danym polu kwadrat ma najmniejszy obwód.

Dowód:

Popatrzmy na nierówność $x \cdot y \leq (\frac{x+y}{2})^2$ z drugiej strony. Łatwo widać, że $4 \cdot x \cdot y \leq (x+y)^2$. Niech l będzie danym polem prostokąta. Wtedy jego połowa obwodu wynosi

$2 \cdot l \leq x + y$, zatem $4 \cdot l \leq 2 \cdot x + 2 \cdot y$, czyli obwód przyjmuje wartość najmniejszą 4l dla kwadratu o boku $2 \cdot \sqrt{l}$. Zatem $4 \cdot l \leq Ob_{\min}$.

Ćwiczenia do samodzielnego rozwiązania

1. Uzasadnić, że prostokąt o polu 25 ma obwód równy co najmniej 20.
2. Uzasadnić, że prostokąt o obwodzie równym 25 ma pole równe co najwyżej 62.
3. Danych jest pięć liczb rzeczywistych o tej własności, że suma każdych trzech z nich jest dodatnia. Czy suma wszystkich pięciu liczb jest dodatnia ? Jeśli tak to uzasadnij, jeśli nie to podaj przykład.
4. Dlaczego kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną ? Uzasadnij.
5. Uzasadnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność
   $$\frac{a^4+b^4+c^4}{a+b+c} \geq a \cdot b \cdot c.$$
6. Czy prawdziwa jest nierówność postaci $x^2 + y^2 \geq x + y$, dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y ?
7. Uzasadnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e zachodzi nierówność postaci
   $$5 \cdot \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e} \leq \frac{a+b+c+d+e}{5}.$$

Wskazówka: Postępuj analogicznie jak w przykładzie 6, wykorzystując nierówność zachodzącą między średnią geometryczną oraz arytmetyczną sześciu liczb dodatnich.

Literatura

1. R. Courant, H. Robbins „Co to jest matematyka” PWN Warszawa 1962
2. J. Browkin „Zadania z olimpiad matematycznych’’ WSZIP Warszawa 1980
3. P. Jędzejewicz „Bukiety matematyczne dla gimnazjum’’ Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe Gdańsk 2002