Matematyka elementarna – materiały pomocnicze koła matematycznego w Gimnazjum 2008/2009

Zbigniew Stebel

Zagadnienie 1.

Liczba dwucyfrowa po podzieleniu przez sumę swoich cyfr daje w wyniku cyfrę jedności. Ile jest takich liczb?

<u>Rozwiązanie zagadnienia 1:</u>

Oznaczmy przez 10a+b dowolną liczbę dwucyfrową, gdzie a i b oznaczają odpowiednio cyfrę dziesiątek oraz jedności.

Z treści zadania mamy: (1) $\frac{10a+b}{a+b}=b$.

Przekształćmy to równanie do prostszej postaci. Mnożąc obustronnie przez mianownik równania (1), mamy kolejno:

$10a+b=b\cdot(a+b)\rightarrow 10a=b\cdot(a+b)-b\rightarrow 9a=b\cdot(a+b)-b-a\rightarrow 9a$

z ostatniego równania otrzymujemy: $9a=(a+b)\cdot(b-1)$.

Ponieważ $b-1\neq 0$ więc $b\neq 1$.

Dla b=2: $9a = a + 2 \to 8a = 2 \to a = \frac{1}{4}$ – odpada.
Dla b=3:
$9a = 2 \cdot (a + 3) \to 9a = 2a + 6 \to 7a = 6 \to a = \frac{6}{7}$ – odpada.
Dla b=4:
$9a = 3 \cdot (a + 4) \to 9a = 3a + 12 \to 6a = 12 \to a = 2$ – pasuje.
Dla b=5:
$9a = 4 \cdot (a + 5) \to 9a = 4a + 20 \to 5a = 20 \to a = 4$ – pasuje.
Dla b=6:
$9a = 5 \cdot (a + 6) \to 9a = 5a + 30 \to 4a = 30 \to a = \frac{15}{2}$ – odpada.
Okazuje się, że istnieją dokładnie dwie liczby spełniające warunki zadania: 24 oraz 45.
Sprawdzenie:
24: $\frac{24}{2+4} = \frac{24}{6} = \frac{6 \cdot 4}{6} = 4,$
45: $\frac{45}{4+5} = \frac{45}{9} = \frac{9 \cdot 5}{9} = 5.$

Ćwiczenie 1.
Sprawdzić zadanie dla pozostałych przypadków b.

Ćwiczenie 2.
Zaproponuj krótszą metodę rozwiązania.

Zagadnienie 2.
Liczba dwucyfrowa po podzieleniu przez sumę swoich cyfr daje w wyniku cyfrę dziesiątek.
Ile jest liczb o takiej własności ?
Znajdź te liczby.
Wydaje się, że tymi liczbami są 42 i 54. Jednak tak nie jest.

Ćwiczenie 3.
Uzasadnij, że liczby 42 i 54 nie są rozwiązaniem zagadnienia 2.

<u>Rozwiązanie zagadnienia 2:</u>
Liczby dwucyfrowe to liczby ze zbioru $\{10, 11, 12, \ldots, 99\}$. Oznaczmy przez $\overline{xy} = 10x + y$, dowolną liczbę dwucyfrową, zaś x- cyfra dziesiątek, y- cyfra jedności.

Z treści zadania mamy: (3) $\frac{10x+y}{x+y} = x.$

Mnożąc obustronnie przez mianownik lewej strony równania (1) otrzymujemy kolejno:

$$10x + y = x(x + y)$$
$$\Downarrow$$
$$10x = x(x + y) - y$$
$$\Downarrow$$
$$9x = x(x + y) - y - x$$
$$\Downarrow$$
$$9x = x(x + y) - (y + x)$$
$$\Downarrow$$
$$9x = (x + y)(x - 1)$$

Zatem równanie (4) $9x = (x - 1)(x + y)$ jest równoważne równaniu (3).

Z równania wynika, że $x \neq 1$, gdyż $x - 1 \neq 0$.

Dla x=2: $9 \cdot 2 = 2 + y \rightarrow y = 16$ – odpada gdyż y jest cyfrą.

Dla x=3:

$9 \cdot 3 = 2 \cdot (3 + y) \rightarrow 27 = 6 + 2y \rightarrow 2y = 21 \rightarrow y = \frac{21}{2}$ – odpada, bo ułamek.

Dla x=4:

$9 \cdot 4 = 3 \cdot (4 + y) \rightarrow 3 \cdot 4 = 4 + y \rightarrow 12 - 4 = y \rightarrow y = 8$ – pasuje.

Szukaną liczbą jest 48, bowiem

$$\frac{48}{4+8} = \frac{48}{12} = \frac{12 \cdot 4}{12} = 4.$$

Ćwiczenie 4.
Sprawdzić pozostałe przypadki dla odpowiednich cyfr x. Czy liczba 48 jest jedynym rozwiązaniem zagadnienia 2?

Zagadnienie 3.
Znaleźć dwie liczby naturalne spełniające warunki:
- suma tych liczb wynosi 432,
- ich największy wspólny dzielnik jest równy 36.

<u>Rozwiązanie zagadnienia 3:</u>
Oznaczmy przez l_1, l_2 – szukane dwie liczby naturalne.
Z warunku pierwszego (5) $l_1 + l_2 = 432.$
Z warunku drugiego wynika, że liczby szukane są postaci
(6) $l_1 = 36k, l_2 = 36r,$ gdzie liczby k i r są względnie pierwsze. Oznacza to, że ich największy wspólny dzielnik wynosi 1:
$$NWD(l_1, l_2) = NWD(36k, 36r) = 36NWD(k, r) = 36 \rightarrow NWD(k, r) = 1.$$

Uwzględniając warunki (4) i (5) otrzymujemy:
$$36 \cdot k + 36 \cdot r = 432.$$

Stąd otrzymujemy kolejno

$$36\cdot(k+r)=432 \to 2^2\cdot 3^2\cdot(k+r)=2^4\cdot 3^3 \to k+r=2^2\cdot 3=12$$

Otrzymaliśmy równanie postaci (6)
$k+r=12,$ które rozwiążemy w liczbach naturalnych.
Dla k=1, r=11 są względnie pierwsze
Dla k=2, r=10 odpada
Dla k=3, r=9 odpada
Dla k=4, r=7 są względnie pierwsze
Dla k=5, r=7 są względnie pierwsze
Pozostałych nie ma sensu sprawdzać (dlaczego?)
Podstawiając do równania (6) znalezione pary liczb mamy dwie pary rozwiązań:

I. $\begin{cases} l_1 = 36\cdot k = 36\cdot 1 = 36 \\ l_2 = 36\cdot r = 36\cdot 11 = 396 \end{cases}$

II. $\begin{cases} l_1 = 36\cdot k = 36\cdot 5 = 180 \\ l_2 = 36\cdot r = 36\cdot 7 = 252 \end{cases}$

Zagadnienie 4.
W styczniu 1997 roku Teresa ukończyła tyle lat, ile wynosi suma cyfr roku, w którym się urodziła. Ile lat będzie miała Teresa w roku 2009 ?

<u>Rozwiązanie zagadnienia 4:</u>
Oznaczmy przez a liczbę dziesiątek, zaś przez b liczbę jedności roku, w którym urodziła się Teresa.

W styczniu 1998 roku ukończyła dokładnie $1997-(1900+10a+b)$ lat.
Suma cyfr roku, w którym urodziła się Teresa wynosiła $1+9+a+b$.
Z treści zadania wynika równanie: $1997-1900-10a-b=10+a+b$.
Przenosząc niewiadome na jedną stronę równości a wiadome na drugą otrzymujemy równanie: $11a+2b=87$. Cyfra a musi być nieparzysta (dlaczego ?)

Dla a=1: $11+2b=87 \to 2b=76 \to b=\frac{76}{2}$ – odpada.

Dla a=3: $33+2b=87 \to 2b=54 \to b=\frac{54}{2}$ – odpada.

Dla a=5: $55+2b=87 \to 2b=32 \to b=\frac{32}{2}$ – odpada

Dla a=7: $77+2b=87 \to 2b=10 \to b=\frac{10}{2}=5$ – ok

Dla a=9: $99+2b=87 \to 2b=-12$ – odpada

Teresa urodziła się w roku 1975, w roku 1997 ukończyła 22 lata zaś w roku 2009 będzie miała 22+3+9=34 lata.