Zadania konkursowe dla gimnazjalistów

Zagadnienie 1.

Dowieść, że $\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}=1$.

Dowód:

Wyrażenia podpierwiastkowe wystarczy zwinąć w pełny kwadrat i skorzystać ze wzoru na kwadrat różnicy:

$(A-B)^2=A^2-2\cdot A\cdot B+B^2$.

Mamy kolejno:

$\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}}=\sqrt{2-2\cdot\sqrt{2}+1}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\left(\sqrt{2}-1\right)$,

$\sqrt{5-\sqrt{24}}=\sqrt{5-2\cdot\sqrt{6}}=\sqrt{5-2\cdot\sqrt{2\cdot 3}}=\sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$,

$\sqrt{7-\sqrt{48}}=\sqrt{7-2\cdot\sqrt{3\cdot 4}}=\sqrt{3-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}+4}=\sqrt{4-2\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}+3}=\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}=\left(2-\sqrt{3}\right)$.

$L=\sqrt{3-\sqrt{8}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{7-\sqrt{48}}=\left(\sqrt{2}-1\right)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})=$

$(\sqrt{2}-\sqrt{2})+(\sqrt{3}-\sqrt{3})+(2-1)=1=P$.

Lewa strona równania wyjściowego jest równa prawej, co kończy dowód.

Zagadnienie 2.

Wyznaczyć wszystkie rozwiązania układu równań

$\begin{cases}25x^2+9y^2=12yz\\ 9y^2+4z^2=20xz\\ 4z^2+25x^2=30xy\end{cases}$ w liczbach rzeczywistych x, y, z.

Rozwiązanie:

Widzimy, że układ równań nie jest układem równań liniowych. Popróbujemy dodać te równania do siebie, może coś wyjdzie.

Dodając obustronnie równania tego układu otrzymujemy:

$25x^2+9y^2+9y^2+4z^2+4z^2+25x^2=12yz+20xz+30xy$

$\to 50x^2+18y^2+8z^2=12yz+20xz+30xy$.

Przenosząc wszystko z prawej strony na lewą otrzymujemy:

$50x^2-30xy+18y^2-12yz+8z^2-20xz=0$.

Grupując sprytnie wyrazy otrzymujemy:

$\left(25x^2-30xy+9y^2\right)+\left(25x^2-20xz+4z^2\right)+\left(9y^2-12yz+4z^2\right)=0$.

Korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń otrzymujemy:

$(5x-3y)^2+(5x-2z)^2+(3y-2z)^2=0$.

Otrzymaliśmy równanie równoważne z układem równań danym w zadaniu.
Załóżmy, że trójka liczb (x, y, z) jest rozwiązaniem danego układu równań.
Wiadomo, że suma kwadratów jest zerem, gdy każdy kwadrat jest zerem (dlaczego?)
Zatem z ostatniego równania mamy:

$5x-3y=0,\quad 5x-2z=0,\quad 3y-2z=0$.

Otrzymujemy: $2z=5x=3y$.

Połóżmy w miejsce x, y, z takie liczby, takie aby ostatnie równanie było prawdziwe.
Mamy:
$2\cdot 15 = 5\cdot 6 = 3\cdot 10, \rightarrow 30 = 30 = 30$, zatem x=6, y=10, z=15.
Niech teraz k- oznacza pewną liczbę rzeczywistą. Możemy położyć:
$x = 6\cdot k, \quad y = 10\cdot k, \quad z = 15\cdot k.$ Okazuje się że $30\cdot k = 30\cdot k = 30\cdot k.$

Zatem trójka liczb postaci: $\begin{matrix} x = 6\cdot k, \\ y = 10\cdot k, \\ z = 15\cdot k, \end{matrix}$ gdzie $k \in R$ jest rozwiązaniem danego układu równań.

Zagadnienie 3.

Sprawdzić, że trójka liczb postaci (6k, 10k, 15k) jest rozwiązaniem układu
$\begin{cases} 25x^2 + 9y^2 = 12yz \\ 9y^2 + 4z^2 = 20xz \\ 4z^2 + 25x^2 = 30xy \end{cases}$, gdzie x, y, z są liczbami rzeczywistymi.

Sprawdzenie:
Liczby x=6k, y=10k, z=15k są rzeczywiste bo $k \in R.$
Podstawiając te liczby do równania pierwszego otrzymujemy:
$L = 25\cdot(6k)^2 + 9(10k)^2 = 25\cdot 36k^2 + 9\cdot 100k^2 = 25\cdot\left(36k^2 + 9\cdot 4k^2\right) = 25\cdot 2\cdot 36k^2 =$
$50\cdot 36k^2 = 1800k^2, P = 12\cdot 10k\cdot 15k = 120\cdot 15k^2 = 1800k^2, L = P.$
Podstawiając te same liczby do równania drugiego otrzymujemy:
$L = 9\cdot(10k)^2 + 4\cdot(15k)^2 = 900k^2 + 4\cdot 225k^2 = 1800k^2, P = 20\cdot 6k\cdot 15k = 1800k^2.$
Podstawiając rozwiązania do równania trzeciego otrzymujemy:
$L = 4\cdot(15k)^2 + 25\cdot(6k)^2 = 900k^2 + 25\cdot 36k^2 = 1800k^2, P = 30\cdot 6k\cdot 10k = 1800k^2.$
Okazuje się, że równania układu dla liczb x, y, z są tożsamościami, zatem dla każdej liczby rzeczywistej k, liczby x, y, z są rozwiązaniami danego układu.

Zagadnienie 4.

Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

Dowód:
Niech $2\cdot k - 1, 2\cdot k + 1$ – dwie kolejne liczby nieparzyste, gdzie $k \in C.$
Wtedy
$(2k+1)^2 - (2k-1)^2 = (2k+1-(2k-1))\cdot(2k+1+2k-1) = (2k+1-2k+1)\cdot(4k) = 2\cdot 4k = 8k,$
widać, że prawa strona równania jest podzielna przez 8, więc prawa strona też, gdyż k jest liczbą całkowitą.

Zagadnienie 5.

W koło o promieniu 10 wybrano 99 punktów. Dowiedziemy, że wewnątrz koła istnieje punkt odległy od każdego z wybranych punktów o więcej niż 1.

Rozwiązanie:

Pole koła o promieniu r=10 wynosi $P=\pi\cdot 10^2=\pi\cdot 100=100\pi$

W kole o tym promieniu wybrano 99 punktów. Ustalmy zbiór wszystkich punktów odległych o co najwyżej 1 od któregokolwiek z wybranych punktów. Zbiór tych ustalonych punktów jest sumą kół o środkach w wybranych punktach i promieniu równym 1. Każde takie koło ma pole równe π, zatem suma tych kół ma pole nie większe niż 99π.

Pole sumy dowolnych figur jest nie większe niż suma ich pól.

Wiemy z treści zadania, że wyjściowe pole koła wynosi 100π, więc istnieją wewnątrz tego koła punkty nie należące do opisanego zbioru, czyli odległe o więcej niż 1 od każdego spośród 99 wybranych punktów.

Zagadnienie 6 .

Wykaż, że różnica sześcianów dwóch kolejnych liczb naturalnych przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1.

Dowód:

Oznaczmy przez n, n+1- kolejne liczby naturalne.

Obliczmy sześciany tych liczb:

n^3, $(n+1)^3=n^3+3\cdot n^2+3\cdot n+1$, ze wzoru na sześcian sumy dwóch wyrażeń.

Różnica sześcianów wynosi:

$(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1=3\cdot(n^2+n)+1=3\cdot k+1$, gdzie $k=n^2+n\in C$, ponieważ lewa strona równania daje resztę 1 więc prawa też. Zatem zagadnienie rozwiązane.

Zagadnienie 7.

Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie x, które spełniają równanie:

$x^2+x^3+x^4=3.$

Rozwiązanie:

$x^4+x^3+x^2+x-x-1=3-1\rightarrow x^3\cdot(x+1)+x\cdot(x+1)-(x+1)=2$

Przenosząc wspólny czynnik przed nawias, otrzymujemy:

$$(x+1)\cdot(x^3+x-1)=2\rightarrow\begin{cases} x+1=2,\\ x^3+x-1=1.\end{cases}$$

Z uwagi na fakt, że dodatnimi dzielnikami liczby 2 są liczby 2 i 1, mamy:

$$x+1=2\rightarrow x=1, x^3+x-1=1\rightarrow x^3+x=2\rightarrow x\cdot(x^2+1)=2\rightarrow\begin{cases} x=1\\ x^2+1=2\rightarrow x=1.\end{cases}$$

Jedyna liczbą całkowitą dodatnią spełniającą równanie $x^2+x^3+x^4=3$ jest liczba x=1.

Zagadnienie 8.

Udowodnij, że suma trzech kolejnych dowolnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.

Dowód:
Oznaczmy odpowiednio przez
$l_1 = n, l_2 = n+1, l_3 = n+2$ – kolejne dowolne liczby naturalne.
Dodając te liczby otrzymujemy:
$l_1 + l_2 + l_3 = n + n + 1 + n + 2 = 3 \cdot n + 3 = 3 \cdot (n+1) = 3m,$ gdzie $m = n + 1 \in N$, więc suma trzech dowolnych kolejnych liczb naturalnych jest liczbą naturalną podzielną przez 3.

Zagadnienie 9.

Jaka jest cyfra setek milionów liczby 35!?

Rozwiązanie:
Zdefiniujmy: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$
Z definicji silni mamy: $35! = 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
Począwszy od liczby 34 co druga jest podzielna przez 2, zatem tych liczb jest 17, ponadto mamy wielokrotności liczby 2: $2^2 = 4, 2^3 = 8, 2^4 = 16, 2^5 = 32,$ czyli dodatkowo mamy kolejne dwójki. (Ile jest wszystkich dwójek ?) Ponadto co piata liczba jest podzielna przez 5. Wśród liczb podzielnych przez 5 mamy dokładnie siedem 5 (dlaczego ?), oraz dodatkowo jedna piątka gdyż $5^2 = 25$. Zatem wszystkich piątek jest dokładnie 8. Licz 2 jest dużo więcej, zatem do każdej piątki możemy dorzucić dwójkę. Zauważmy, że $10 = 2 \cdot 5,$ więc
$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^8 = 100000000.$
Otrzymujemy: $35! = X00000000,$ gdzie X- oznacza cyfry naszej liczby przed zerem. Zatem cyfrą setek milionów jest zero.

Zadania do samodzielnego rozwiązania:

1. Jaka jest cyfra dziesiątek milionów liczby 30!
2. Udowodnij, że iloczyn dowolnej liczby parzystej i nieparzystej jest liczbą parzystą.
3. Udowodnij, że iloczyn dwóch liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą
4. Jaka jest suma cyfr liczby $10^{2008} - 2008$?
5. Która jest godzina, jeśli do końca doby pozostało jeszcze $\frac{2}{3}$ tego co już upłynęło?