Odkrywanie i dowodzenie wzorów

Zbigniew Stebel

Zagadnienie 1.
Poniżej kolejno pierwsza, druga, trzecia i czwarta liczba trójkątna:

$$1 = 1$$
$$1 + 2 = 3$$
$$1 + 2 + 3 = 6$$
$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Ile wynosi n- ta liczba trójkątna, gdzie $n \in N$.

Rozwiązanie:
Oznaczmy przez T_n n – tą liczbę trójkątną.
Ponieważ czwarta liczba trójkątna jest sumą czterech kolejnych liczb naturalnych, więc n – ta liczba powinna być sumą n – kolejnych liczb naturalnych.
Zatem $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.
Ile wynosi suma n – kolejnych liczb naturalnych?
Ustawmy n kolejnych liczb naturalnych w ciąg rosnący i malejący i dodajmy je stronami:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \\ \hline n+1 & n+1 & \cdots & n+1 \end{array}$$

W pierwszym i drugim wierszu mamy sumy n – kolejnych liczb naturalnych, zatem jest ich $2 \cdot S_n$. Każda liczba dodana jest postaci n+1 i jest ich dokładnie n, zatem $2 \cdot S_n = n(n+1)$, czyli suma n – kolejnych liczb naturalnych wynosi: $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ponieważ n – ta liczba trójkątna jest n- tą sumą kolejnych liczb naturalnych, więc $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Zagadnienie 2.

Liczba trójkątna wyraża się wzorem $T_n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in N$. Dowieść indukcyjnie.

Dowód (indukcyjny)

(i) Dla n=1 mamy $T_1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$ czyli pierwszą liczbę trójkątną, co jest słuszne.

(ii) Załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla danej k – tej liczby naturalnej, to znaczy $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}, k \geq 1$

(iii) Uzasadnimy teraz słuszność tezy indukcyjnej postaci: $1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$, dla k+1 – szej liczby naturalnej.

Korzystając z założenia indukcyjnego mamy:

$$L = 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = P.$$

Z zasady indukcji matematycznej wynika, że wzór na obliczanie n – tej liczby trójkątnej jest słuszny dla dowolnej liczby naturalnej.

Ćwiczenie 1.

Znaleźć $T_{100}, T_{150}, T_{200}, T_{1000}, T_{2008}$.

Zagadnienie 3.
Znaleźć wzór na sumę na sumę n- kolejnych liczb nieparzystych: $1+3+5+\cdots+(2n-1)=?$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$1=1$$
$$1+3=4$$
$$1+3+5=9$$
$$1+3+5+7=16$$
$$1+3+5+7+9=25$$
$$1+3+5+7+9+11=36$$
$$1+3+5+7+9+11+13=49$$
$$1+3+5+7+9+11+13+15=64$$

Zatem $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+\cdots+(2n-1)=n^2$.

Zagadnienie 4.
Dowieść indukcyjnie, że $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2, n\in N$.

Dowód (indukcyjnie)

(i) Sprawdźmy wzór dla najmniejszej liczby naturalnej $n_0=1$.

L=1, $P=1^2=1, L=P$.

(ii) Założenie indukcyjne: dla danej k – tej liczby naturalnej zachodzi wzór postaci: $1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2, k\geq 1$.

(iii) Korzystając z założenia indukcyjnego udowodnimy prawdziwość tezy indukcyjnej postaci: $1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1)=(k+1)^2$, dla k+1 – szej liczby naturalnej.

$L=k^2+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2=P$.

Uzasadniliśmy prawdziwość tezy indukcyjnej na podstawie założenia indukcyjnego, zatem z zasady indukcji matematycznej wynika słuszność wzoru dla każdej liczby naturalnej.

Ćwiczenie 2.
Znaleźć sumę $2+4+6+\dots+2n=?$
Ćwiczenie 3.
Dowieść indukcyjne znaleziony w ćwiczeniu 3 wzór na sumę n liczb parzystych.
Zagadnienie 5.
Ile wynosi suma kwadratów kolejnych n- liczb naturalnych ?
Rozwiązanie:
Chcemy znaleźć sumę $1^2+2^2+3^2+4^2+\dots+n^2=?$
Korzystając ze wzoru na sześcian sumy (przypomnij trójkąt Pascala) otrzymujemy:
$(k+1)^3-k^3=k^3+3k^2+3k+1-k^3=3k^2+3k+1.$
Podstawiając w miejsce k kolejno liczby od 1 do n mamy:

$$2^3-1^3=3\cdot 1^2+3\cdot 1+1$$
$$3^3-2^3=3\cdot 2^2+3\cdot 2+1$$
$$4^3-3^3=3\cdot 3^2+3\cdot 3+1$$
$$5^3-4^3=3\cdot 4^2+3\cdot 4+1$$
$$6^3-5^3=3\cdot 5^2+3\cdot 5+1$$
…………………………
$$(n+1)^3-n^3=3\cdot n^2+3\cdot n+1$$

Dodając powyższe n równań stronami otrzymamy:
$$(n+1)^3-1=3\cdot(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)+3\cdot(1+2+3+\dots+n)+n$$
porządkując wyrażenia i korzystając ze wzoru na sumę n – kolejnych liczb naturalnych:
$$\to (n+1)^3-1-n=3\cdot(1^2+2^2+\dots+n^2)+3\cdot(1+2+\dots+n)$$
$$\to (n+1)^3-(n+1)=3\cdot(1^2+2^2+\dots+n^2)+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$\to (n+1)\cdot((n+1)^2-1)-\frac{3}{2}\cdot n(n+1)=3\cdot(1^2+2^2+\dots+n^2)$$
$$\to \frac{2(n+1)(n^2+2n)-3n(n+1)}{2}=3\cdot(1^2+2^2+\dots+n^2)$$

$$\rightarrow \frac{(n+1)(2n^2+4n-3n)}{3} = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{2} = 3\cdot(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$

Dzieląc ostatnią równość obustronnie przez 3 otrzymujemy:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1^2+2^2+\cdots+n^2.$$

Ćwiczenie 4.

Uzasadnić indukcyjnie wzór z zagadnienia 5.