Wybrane zadania z konkursów matematycznych dla uczniów gimnazjów

Zbigniew Stebel

Treść zadań nie jest oryginalna, ich źródłem są takie konkursy jak: Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów oraz Dolnośląskie Mecze Matematyczne.

Zadanie 1.

Istnieje nieskończenie wiele trójek (a,b,c) dodatnich liczb całkowitych, które spełniają równanie: $a^3+3b^6=c^2$.Dowieść.

Dowód:

Oznaczmy przez n dowolną liczbę całkowitą dodatnią, spełniającą równanie: $a^3+3b^6=c^2$.Najwyższym wykładnikiem potęgi jest w tym równaniu liczba 6. Liczby 2 i 3 są dzielnikami liczby 6, zatem ta liczba będzie wspólna dla trzech składników dodatnich. Lewa strona wynosi: $\left(n^2\right)^3+3\cdot(n)^6=n^6+3\cdot n^6=4\cdot n^6=\left(2\cdot n^3\right)^2$ i równa się prawej stronie równości. Zatem $a=n^2, b=n, c=2n^3$ są dodatnimi rozwiązaniami całkowitymi, więc każda trójka liczb postaci $\left(n^2, n, 2n^3\right)$ spełnia równanie. Tych trójek jest nieskończenie wiele, gdyż liczb całkowitych dodatnich też jest tyle. Przykłady: (1,1,2), (4,2,16), (9,3,54),….

Zadanie 2.

Nie istnieje dodatnia liczba całkowita n, dla której liczbę 2^n można przedstawić w postaci sumy co najmniej dwóch kolejnych dodatnich liczb całkowitych. Uzasadnić.

Dowód:

Przedstawmy liczbę 2^n w postaci sumy kolejnych m- liczb naturalnych dodatnich, gdzie liczby k też są takie. Wtedy otrzymujemy: $2^n=k+(k+1)+(k+2)+(k+3)+\cdots+(k+m)=(k+k+k+\cdots+k)+(1+2+3+\cdots+m)$. Z rozpisania widać, że liczbę k dodawaliśmy m+1- razy, bo od 0 do m czyli $(k+k+k+\cdots+k)=(m+1)k$. Ponadto suma kolejnych liczb naturalnych $1+2+3+\cdots m$ wynosi $\frac{m(m+1)}{2}$.

Otrzymujemy (1) $2^n=(m+1)k+\frac{m(m+1)}{2}$. Rozpatrzmy dwa przypadki gdy ma jest liczbą parzystą oraz nieparzystą.

Oznaczmy przez NPAR, PAR odpowiednio zbiór liczb nieparzystych i parzystych.

$m\in NPAR: m=2r-1, r\geq 1$. Podstawiając do (1) otrzymujemy: $2^n=(2r-1+1)k+\frac{(2r-1)(2r-1+1)}{2}=2rk+r(2r-1)=r(2k+2r-1)$. Liczba postaci

2k+2r-1=2(k+r)-1 jest nieparzysta więc nie może być dzielnikiem liczby 2^n. Otrzymaliśmy sprzeczność.

$m \in Par : m = 2r, r \geq 1.$ Podstawiając do (1) otrzymujemy: $2^n = (2r+1)k + \frac{2r(2r+1)}{2} = (2r+1)k + r(2r+1) = (2r+1)(k+r)$. Liczba postaci $2r+1$ jest liczbą nieparzystą więc nie może być dzielnikiem liczby 2^n, kolejna sprzeczność kończy dowód.

Zadanie 3.
Prosta $ax + by = c$ przechodzi przez punkt $P(-1,2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy b jest średnią arytmetyczną liczb a i c. Dowieść.

Dowód:
Etap pierwszy:

$\Leftarrow$Załóżmy, że $b = \frac{a+c}{2}$. Pokażemy, że prosta postaci $ax + by = c$ przechodzi przez punkt $P(-1,2)$. Z równania prostej mamy:

$ax + \frac{a+c}{2} y = c.$ Podstawiając do ostatniego równania współrzędne punktu $P(-1,2)$ otrzymujemy:

$L = a \cdot (-1) + \frac{a+c}{2} \cdot 2 = -a + a + c = c = P,$ zatem prosta przechodzi przez punkt $P(-1,2)$.

Etap 2:
$\Rightarrow$ Załóżmy, że prosta postaci $ax + by = c$ przechodzi przez punkt $P(-1,2)$. Pokażemy, że b jest średnią arytmetyczną liczb a i c.
Podstawiając współrzędne punktu $P(-1,2)$ do równania prostej $ax + by = c$ otrzymujemy kolejno:

$a \cdot (-1) + b \cdot 2 = c \to -a + 2 \cdot b = c \to 2 \cdot b = a + c \to b = \frac{a+c}{2}$, czyli istotnie b jest średnią arytmetyczną liczb a i c.

Zadanie 4.
Liczba 15 jest największą resztą jaką można otrzymać z dzielenia liczby dwucyfrowej przez sumę jej cyfr. Uzasadnić.

Dowód: Zapiszmy w postaci algebraicznej dzielenie dowolnej liczby dwucyfrowej przez sumę jej cyfr: $\frac{10x+y}{x+y}$, gdzie x, y są jednocyfrowe oraz $x \neq 0,$ gdyż liczba dwucyfrowa nie może mieć postaci 00,01,….Reszta z dzielenia musi być mniejsza od dzielnika (dlaczego?)Maksymalny dzielnik wynosi 18 (dlaczego?)

Przypuśćmy, że reszta z dzielenia wynosi 17. Wtedy x=y=9, zatem mamy $\frac{99}{18} = 5\frac{9}{18}$ czyli reszta wynosi 9 i sprzeczność.

Przypuśćmy, że reszta wynosi 16 wtedy $x + y$ wynosi 17 lub 18 (dlaczego?) Zatem otrzymujemy trzy liczby 99, 98, 89.
Każda z tych liczb daje przy odpowiednich (jakich?) dzieleniach reszty mniejsze niż 16 (dlaczego?) i sprzeczność.

Przypuśćmy, że reszta wynosi 15, wtedy $x+y$ wynosi 16, 17 lub 18 (dlaczego ?)Otrzymujemy sześć liczb do sprawdzenia: 99,98,89,88,97,79.(sprawdź pięć pierwszych z tych liczb)

Dla ostatniej z liczb mamy: $\frac{79}{16}=4\frac{15}{16}$, czyli największą możliwą resztą z dzielenia liczby dwucyfrowej przez sumę jej cyfr jest liczba 15, co należało uzasadnić.

Zadanie 5.

Niech a_n będzie liczbą zapisaną za pomocą n – jedynek.

Wtedy w sumie $a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots a_{100}$ cyfra 1 występuje 10 razy. Uzasadnić.

Dowód:

$a_1 = 1$

$a_2 = 11$

$a_3 = 111$

$a_4 = 1111$

…

$a_{100} = 1111...111$

Dodając pisemnie otrzymamy:

$a_1 + a_2 = 12$

$a_1 + a_2 + a_3 = 123$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1234$

… (sprawdzić)

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} = 12345678901 2$

…

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 12345678901234567890\cdots12345678901234567890$

W każdej dziesiątce cyfr jest dokładnie jedna jedynka a mamy dokładnie 10 dziesiątek, czyli $10\cdot 1 = 10$, zatem istotnie mamy 10 jedynek.