ZADANIA KONKURSOWE Z MATEMATYKI W GIMNAZJACH

Zbigniew Stebel

1. Podstawowe nierówności.

Nierówność I.
Dla dowolnych liczb rzeczywistych M i N zachodzi nierówność postaci
(1) $M^2 + N^2 \geq 2 \cdot M \cdot N.$
Dowód.
Metoda 1.
Korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń
$(M - N)^2 = M^2 - 2 \cdot M \cdot N + N^2$
otrzymujemy $M^2 + N^2 = (M - N)^2 + 2 \cdot M \cdot N \geq 2 \cdot M \cdot N$, bo $(M - N)^2$ jest liczbą nieujemną.
Metoda 2.
Startując z nierówności (1) i przenosząc wyrażenie z prawej strony na lewą otrzymujemy nierówność postaci
$M^2 - 2 \cdot M \cdot N + N^2 = (M - N)^2 \geq 0$, ze wzoru na kwadrat różnicy. Zatem dowód zakończony gdyż kwadrat dowolnej liczby jest liczbą nieujemną.
Nierówność II.
Dla dowolnych liczb dodatnich P i Q zachodzi nierówność postaci

(2) $\frac{P}{Q} + \frac{Q}{P} \geq 2.$

Dowód.
Sprowadzając lewą stronę nierówności do wspólnego mianownika otrzymujemy nierówność równoważną postaci:
$\frac{P}{Q} + \frac{Q}{P} = \frac{P^2 + Q^2}{P \cdot Q} \geq 2$, mnożąc obustronnie przez mianownik otrzymujemy
$P^2 + Q^2 \geq 2 \cdot P \cdot Q$, przenosząc wyrażenie z prawej strony na lewą i korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń otrzymujemy nierówność równoważną postaci
$(P - Q)^2 \geq 0$ prawdziwą dla dowolnych P i Q więc dla P i Q dodatnich też.
Nierówność III.
Średnia geometryczna dwóch liczb dodatnich jest nie większa od **średniej arytmetycznej** tych liczb.

Dowód.
Chcemy pokazać, że dla dowolnych liczb dodatnich X i Y zachodzi nierówność postaci:
$\frac{X+Y}{2} \geq \sqrt{X \cdot Y}$.
Mnożąc obustronnie nierówność przez (2) otrzymujemy równoważną nierówność postaci
(3) $X+Y \geq 2 \cdot \sqrt{X \cdot Y}$,
podnosząc (3) obustronnie do kwadratu i przenosząc wyrażenie z prawej na lewą stronę otrzymujemy
$(X+Y)^2 - 4 \cdot X \cdot Y \geq 0$, stosując kolejno wzór na kwadrat sumy i różnicy dwóch wyrażeń otrzymujemy nierówność równoważną $(X-Y)^2 \geq 0$ prawdziwą dla dowolnych liczb rzeczywistych więc dla dodatnich również.

2. Przykłady dowodzenia.

Niech x, y i z będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Przykład 1.

Wykazać nierówność

$2 \cdot x^2 + y^2 + z^2 \geq 2 \cdot (y+z) \cdot x.$

Dowód.

Lewa strona nierówności jest niemniejsza od prawej, bo

$2 \cdot x^2 + y^2 + z^2 = (x^2 + y^2) + (x^2 + z^2) \geq 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot x \cdot z = 2 \cdot x \cdot (y+z) = 2 \cdot (y+z) \cdot x,$ na mocy wzoru (1).

Przykład 2.

Udowodnij nierówność

(4) $x^2 + y^2 + z^2 \geq x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x.$

<u>Metoda 1.</u>

Z nierówności (1) mamy

$$x^2 + y^2 \geq 2 \cdot x \cdot y$$
$$y^2 + z^2 \geq 2 \cdot y \cdot z$$
$$z^2 + x^2 \geq 2 \cdot z \cdot x,$$

stąd po dodaniu stronami otrzymujemy

$2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot z^2 \geq 2 \cdot (x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x)$, dzieląc obustronnie przez liczbę 2 otrzymujemy nierówność wyjściową.

<u>Metoda 2.</u>

Mnożąc obustronnie nierówność (4) przez liczbę 2 otrzymujemy

$2 \cdot x^2 + 2 \cdot y^2 + 2 \cdot z^2 \geq 2 \cdot x \cdot y + 2 \cdot y \cdot z + 2 \cdot z \cdot x,$

przenosząc co się da na lewą stronę nierówności i korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy otrzymujemy

$(x^2 - 2 \cdot x \cdot y + y^2) + (y^2 - 2 \cdot y \cdot z + z^2) + (z^2 - 2 \cdot z \cdot x + x^2)$

$= (x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2 \geq 0,$

co kończy dowód.

Komentarz: Kwadrat dowolnej liczby jest liczbą nieujemną, a suma liczb nieujemnych też jest nieujemna.

Przykład 3.
Wykazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich p i q zachodzi nierówność
$(p+q)\cdot(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})\geq 4.$

Dowód.
$(p+q)\cdot(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})=\frac{p+q}{p}+\frac{p+q}{q}=\frac{p}{p}+\frac{q}{p}+\frac{p}{q}+\frac{q}{q}=$ na mocy na wzoru wcześniej uzasadnionego (2).
$=(\frac{p}{q}+\frac{q}{p})+2\geq 2+2=4,$

Przykład 4.
Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich p, q, r zachodzi nierówność postaci $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\geq\frac{9}{p+q+r}$. Kiedy zachodzi równość?

Dowód.
Pomnóżmy obustronnie przez mianownik prawej strony nierówności. Wówczas otrzymamy nierówność równoważną
$(p+q+r)\cdot(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r})\geq 9,$ którą mamy uzasadnić.

Badamy lewą stronę $(p+q+r)\cdot(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r})=\frac{p+q+r}{p}+\frac{p+q+r}{q}+\frac{p+q+r}{r}=1+\frac{q}{p}+\frac{r}{p}+\frac{p}{q}+1+\frac{r}{q}+\frac{p}{r}+\frac{q}{r}+1\geq 3+6=9$, bo

$\frac{p}{q}+\frac{q}{p}\geq 2,\quad \frac{p}{r}+\frac{r}{p}\geq 2,\quad \frac{q}{r}+\frac{r}{q}\geq 2$ na mocy (2).

Przykład 5.
Korzystając z nierówności (3) udowodnić nierówność postaci
$\frac{a+b+c+d}{4}\geq\sqrt[4]{a\cdot b\cdot c\cdot d}$, dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich.

Dowód.
Mamy pokazać prawdziwość nierówności równoważnej postaci

(4) $a+b+c+d \ge 4\cdot\sqrt[4]{a\cdot b\cdot c\cdot d}$.

$a+b+c+d \ge 2\cdot\sqrt{a\cdot b}+2\cdot\sqrt{c\cdot d} = 2\cdot(\sqrt{a\cdot b}+\sqrt{c\cdot d}) \ge 2\cdot 2\sqrt{\sqrt{a\cdot b}\cdot\sqrt{c\cdot d}} = 4\cdot((a\cdot b\cdot c\cdot d)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ po dwukrotnym zastosowaniu nierówności (3) i z własności iloczynu pierwiastków stopnia 2. Z własności potęgi oraz notacji pierwiastka stopnia 4 otrzymujemy nierówność

$a+b+c+d \ge 4\cdot(a\cdot b\cdot c\cdot d)^{\frac{1}{4}} = 4\cdot\sqrt[4]{a\cdot b\cdot c\cdot d}$.

Przykład 6.

Uzasadnij, że bezpośrednim wnioskiem z nierówności (4) jest nierówność postaci

(5) $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}$, prawdziwa dla dowolnych trzech liczb rzeczywistych a, b, c dodatnich.

Dowód.

Podstawmy w nierówności (4) $d = \sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}$. Wtedy nierówność ta przyjmie postać

$a+b+c+\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c} \ge 4\cdot\sqrt{a\cdot b\cdot c\cdot\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}}$, z własności potęgi oraz iloczynu potęg mamy

$a+b+c \ge 4\cdot\sqrt[4]{a\cdot b\cdot c\cdot(a\cdot b\cdot c)^{\frac{1}{3}}} - \sqrt[3]{a\cdot b\cdot c} = 4\cdot(a^{\frac{4}{3}}\cdot b^{\frac{4}{3}}\cdot c^{\frac{4}{3}})^{\frac{1}{4}} - \sqrt{a\cdot b\cdot c} = 4\cdot\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c} - \sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}$, zatem

$a+b+c \ge 3\cdot\sqrt[3]{a\cdot b\cdot c} \Rightarrow \frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{a\cdot b\cdot c}$.

Uwagi:

Wyrażenie postaci $\sqrt{a\cdot b}$ nazywamy średnią geometryczną dwóch nieujemnych liczb.

Wyrażenie postaci $\frac{a+b}{2}$ nazywamy średnią arytmetyczną dwóch nieujemnych liczb.

Wyrażenie postaci $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ nazywamy średnią harmoniczną dwóch dodatnich liczb.

Przykład 7.

Uzasadnić, że zachodzi podwójna nierówność postaci

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{a\cdot b} \le \frac{a+b}{2}.$$

Najpierw udowodnimy, że średnia geometryczna jest niewiększa od średniej arytmetycznej. W drugiej części dowodu pokażemy, że średnia harmoniczna jest niewiększa od średniej geometrycznej.

Dowód.

(*)

Niech a i b oznaczają dowolne liczby nieujemne. Ze wzoru na **kwadrat różnicy** otrzymujemy

$$0 \le (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \le a + b \Rightarrow 2 \cdot \sqrt{a \cdot b} \le a + b$$

$$\Rightarrow \sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2}.$$

(*)

Załóżmy teraz, że a i b są dodatnie oraz zachodzi nierówność postaci $\sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2}$, stąd otrzymujemy następujący ciąg nierówności

$$\sqrt{\frac{a^2 \cdot b^2}{a \cdot b}} \le \frac{a+b}{2} \Rightarrow \frac{a \cdot b}{\sqrt{a \cdot b}} \le \frac{a+b}{2} \Rightarrow 2 \cdot a \cdot b \le (a+b) \cdot \sqrt{a \cdot b}$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b} \le \sqrt{a \cdot b} \Rightarrow \frac{2}{\frac{a+b}{a \cdot b}} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \le \sqrt{a \cdot b}.$$

Przykład 8.

Spośród wszystkich prostokątów o danym obwodzie wyznaczyć prostokąt mający największe pole.

Rozwiązanie:

Niech 2a będzie danym obwodem prostokąta. Chcemy aby zmienne pole tego prostokąta xy było jak największe. Oznaczmy średnią arytmetyczną wielkości dodatnich x i y przez m, zaś przez d oznaczmy średnią arytmetyczną wielkości x i –y. Wtedy możemy zapisać układ równań prosty do rozwiązania. Po dodaniu stronami otrzymujemy

$$\begin{matrix} m = \dfrac{x+y}{2} \\ d = \dfrac{x-y}{2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x + y = 2 \cdot m \\ x - y = 2 \cdot d \end{matrix} \Rightarrow 2 \cdot x = 2 \cdot m + 2 \cdot d$$

$\Rightarrow x = m + d \wedge y = m - d.$

Zatem pole prostokąta wynosi

$$x \cdot y = (m+d) \cdot (m-d) = m^2 - d^2 = \frac{(x+y)^2}{4} - d^2.$$

Ponieważ $d^2 > 0$ poza przypadkiem gdy d=0 więc otrzymujemy stąd nierówność postaci

$x \cdot y \le \dfrac{(x+y)^2}{4} \Rightarrow \sqrt{x \cdot y} \le \dfrac{x+y}{2}$, przy czym $\sqrt{x \cdot y} = \dfrac{x+y}{2}$ gdy d=0 i x=y=m.

Wobec tego, że x+y=a wynika że pole xy przyjmuje wartość maksymalną $\dfrac{a^2}{4}$, gdy x=y=$\dfrac{a}{2}$, czyli dla kwadratu. Jednocześnie udowodniliśmy, że

$\sqrt{S_{\max}} \le \dfrac{x+y}{2}$, czyli wzór (3), dla x, y przyjmujących wartości dodatnie.

Wniosek (własność dla minimum):
Spośród wszystkich prostokątów o danym polu kwadrat ma najmniejszy obwód.
Dowód:

Popatrzmy na nierówność $x \cdot y \le (\dfrac{x+y}{2})^2$ z drugiej strony. Łatwo widać, że $4 \cdot x \cdot y \le (x+y)^2$. Niech l będzie danym polem prostokąta. Wtedy jego połowa obwodu wynosi

$2 \cdot l \le x + y,$ zatem $4 \cdot l \le 2 \cdot x + 2 \cdot y$, czyli obwód przyjmuje wartość najmniejszą 4l dla kwadratu o boku $2 \cdot \sqrt{l}$. Zatem $4 \cdot l \le Ob_{\min}$.

3. Zadania rozwiązane i szkice rozwiązań

Zadanie 1.
Ustawmy n kolejnych liczb naturalnych w ciąg rosnący i malejący i dodajmy je stronami:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & n-1 & \cdots & 1 \\ \hline n+1 & n+1 & \cdots & n+1 \end{array}$$

W pierwszym i drugim wierszu mamy sumy n – kolejnych liczb naturalnych, zatem jest ich $2 \cdot S_n$. Każda liczba dodana jest postaci n+1 i jest ich dokładnie n, zatem $2 \cdot S_n = n(n+1)$, czyli suma n – kolejnych liczb naturalnych wynosi: $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Ponieważ n – ta liczba trójkątna jest n- tą sumą kolejnych liczb naturalnych, więc $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Zadanie 2.

Liczba trójkątna wyraża się wzorem $T_n = \frac{n(n+1)}{2}, n \in N$. Dowieść indukcyjnie.

Dowód (indukcyjny)

(i) Dla n=1 mamy $T_1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$ czyli pierwszą liczbę trójkątną, co jest słuszne.

(ii) Załóżmy, że wzór jest prawdziwy dla danej k – tej liczby naturalnej, to znaczy $1+2+3+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}, k \geq 1$

(iii) Uzasadnimy teraz słuszność tezy indukcyjnej postaci: $1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$, dla k+1 – szej liczby naturalnej.

Korzystając z założenia indukcyjnego mamy:

$$L=1+2+3+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+\frac{2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}=P.$$

Z zasady indukcji matematycznej wynika, że wzór na obliczanie n – tej liczby trójkątnej jest słuszny dla dowolnej liczby naturalnej.

Ćwiczenie 8.

Znaleźć $T_{100}, T_{150}, T_{200}, T_{1000}, T_{2008}$.

Zadanie 3.

Znaleźć wzór na sumę na sumę n- kolejnych liczb nieparzystych: $1+3+5+\cdots+(2n-1)=?$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że

$$1=1$$
$$1+3=4$$
$$1+3+5=9$$
$$1+3+5+7=16$$
$$1+3+5+7+9=25$$
$$1+3+5+7+9+11=36$$
$$1+3+5+7+9+11+13=49$$
$$1+3+5+7+9+11+13+15=64$$

Zatem $1+3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+\cdots+(2n-1)=n^2$.

Zadanie 4.

Dowieść indukcyjnie, że $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2, n\in N.$

Dowód (indukcyjnie)

(i) Sprawdźmy wzór dla najmniejszej liczby naturalnej $n_0=1$.

L=1, $P = 1^2 = 1, L = P.$

(ii) Założenie indukcyjne: dla danej k – tej liczby naturalnej zachodzi wzór postaci: $1+3+5+\cdots+(2k-1) = k^2, k \geq 1.$

(iii) Korzystając z założenia indukcyjnego udowodnimy prawdziwość tezy indukcyjnej postaci: $1+3+5+\cdots+(2k-1)+(2k+1) = (k+1)^2$, dla k+1 – szej liczby naturalnej.

$L = k^2 + (2k+1) = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 = P.$

Uzasadniliśmy prawdziwość tezy indukcyjnej na podstawie założenia indukcyjnego, zatem z zasady indukcji matematycznej wynika słuszność wzoru dla każdej liczby naturalnej.

Ćwiczenie 9.

Znaleźć sumę $2+4+6+\cdots+2n = ?$

Ćwiczenie 10.

Dowieść indukcyjne znaleziony w ćwiczeniu 9 wzór na sumę n liczb parzystych.

Zadanie 5.

Ile wynosi suma kwadratów kolejnych n- liczb naturalnych?

Rozwiązanie:

Chcemy znaleźć sumę $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + n^2 = ?$

Korzystając ze wzoru na sześcian sumy (przypomnij trójkąt Pascala) otrzymujemy:

$(k+1)^3 - k^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$

Podstawiając w miejsce k kolejno liczby od 1 do n mamy:

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$
$$4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1$$
$$5^3 - 4^3 = 3 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 1$$
$$6^3 - 5^3 = 3 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5 + 1$$

…………………………

$$(n+1)^3 - n^3 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$$

Dodając powyższe n równań stronami otrzymamy:

$(n+1)^3 - 1 = 3 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) + 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + n) + n$

porządkując wyrażenia i korzystając ze wzoru na sumę n – kolejnych liczb naturalnych:

$$\to (n+1)^3 - 1 - n = 3\cdot(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3\cdot(1 + 2 + \cdots + n)$$

$$\to (n+1)^3 - (n+1) = 3\cdot(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + 3\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\to (n+1)\cdot((n+1)^2 - 1) - \frac{3}{2}\cdot n(n+1) = 3\cdot(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$$

$$\to \frac{2(n+1)(n^2+2n) - 3n(n+1)}{2} = 3\cdot(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$$

$$\to \frac{(n+1)(2n^2+4n-3n)}{3} = \frac{(n+1)(2n^2+n)}{2} = 3\cdot(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)$$

Dzieląc ostatnią równość obustronnie przez 3 otrzymujemy:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

Ćwiczenie 11.

Uzasadnić indukcyjnie wzór z zadania 5.

Zadanie 6.

Istnieje nieskończenie wiele trójek (a,b,c) dodatnich liczb całkowitych, które spełniają równanie: $a^3 + 3b^6 = c^2$.Dowieść.

Dowód:

Oznaczmy przez n dowolną liczbę całkowitą dodatnią, spełniającą równanie: $a^3 + 3b^6 = c^2$.Najwyższym wykładnikiem potęgi jest w tym równaniu liczba 6. Liczby 2 i 3 są dzielnikami liczby 6, zatem ta liczba będzie wspólna dla trzech składników dodatnich. Lewa strona wynosi: $\left(n^2\right)^3 + 3\cdot\left(n\right)^6 = n^6 + 3\cdot n^6 = 4\cdot n^6 = \left(2\cdot n^3\right)^2$ i równa się prawej stronie równości. Zatem $a = n^2, b = n, c = 2n^3$ są dodatnimi rozwiązaniami całkowitymi, więc każda trójka liczb postaci $\left(n^2, n, 2n^3\right)$ spełnia równanie. Tych trójek jest nieskończenie wiele, gdyż liczb całkowitych dodatnich też jest tyle. Przykłady: (1,1,2), (4,2,16), (9,3,54),….

Zadanie 7.

Nie istnieje dodatnia liczba całkowita n, dla której liczbę 2^n można przedstawić w postaci sumy co najmniej dwóch kolejnych dodatnich liczb całkowitych. Uzasadnić.

Dowód:

Przedstawmy liczbę 2^n w postaci sumy kolejnych m- liczb naturalnych dodatnich, gdzie liczby k też są takie. Wtedy otrzymujemy:

$2^n = k + (k+1) + (k+2) + (k+3) + \cdots + (k+m) = (k+k+k+\cdots+k) + (1+2+3+\cdots+m)$. Z rozpisania widać, że liczbę k dodawaliśmy m+1-razy, bo od 0 do m czyli $(k+k+k+\cdots+k) = (m+1)k$. Ponadto suma kolejnych liczb naturalnych $1+2+3+\cdots m$ wynosi $\frac{m(m+1)}{2}$.

Otrzymujemy (1) $2^n = (m+1)k + \frac{m(m+1)}{2}$. Rozpatrzmy dwa przypadki gdy ma jest liczbą parzystą oraz nieparzystą.

Oznaczmy przez NPAR, PAR odpowiednio zbiór liczb nieparzystych i parzystych.

$m \in NPAR : m = 2r-1, r \geq 1$. Podstawiając do (1) otrzymujemy: $2^n = (2r-1+1)k + \frac{(2r-1)(2r-1+1)}{2} = 2rk + r(2r-1) = r(2k+2r-1)$. Liczba postaci

2k+2r-1=2(k+r)-1 jest nieparzysta więc nie może być dzielnikiem liczby 2^n. Otrzymaliśmy sprzeczność.

$m \in Par : m = 2r, r \geq 1$. Podstawiając do (1) otrzymujemy: $2^n = (2r+1)k + \frac{2r(2r+1)}{2} = (2r+1)k + r(2r+1) = (2r+1)(k+r)$. Liczba postaci $2r+1$ jest liczbą nieparzystą więc nie może być dzielnikiem liczby 2^n, kolejna sprzeczność kończy dowód.

Zadanie 8.

Prosta $ax + by = c$ przechodzi przez punkt $P(-1,2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy b jest średnią arytmetyczną liczb a i c. Dowieść.

Dowód:

Etap pierwszy:

$\Leftarrow$Załóżmy, że $b = \frac{a+c}{2}$. Pokażemy, że prosta postaci $ax + by = c$ przechodzi przez punkt $P(-1,2)$. Z równania prostej mamy:

$ax + \frac{a+c}{2} y = c$. Podstawiając do ostatniego równania współrzędne punktu $P(-1,2)$ otrzymujemy:

$L = a \cdot (-1) + \frac{a+c}{2} \cdot 2 = -a + a + c = c = P$, zatem prosta przechodzi przez punkt $P(-1,2)$.

Etap 2:

$\Rightarrow$ Załóżmy, że prosta postaci $ax + by = c$ przechodzi przez punkt $P(-1,2)$. Pokażemy, że b jest średnią arytmetyczną liczb a i c.

Podstawiając współrzędne punktu $P(-1,2)$ do równania prostej $ax + by = c$ otrzymujemy kolejno:

$a \cdot (-1) + b \cdot 2 = c \rightarrow -a + 2 \cdot b = c \rightarrow 2 \cdot b = a + c \rightarrow b = \frac{a+c}{2}$, czyli istotnie b jest średnią arytmetyczną liczb a i c.

Zadanie 9.

Liczba 15 jest największą resztą jaką można otrzymać z dzielenia liczby dwucyfrowej przez sumę jej cyfr. Uzasadnić.

Dowód: Zapiszmy w postaci algebraicznej dzielenie dowolnej liczby dwucyfrowej przez sumę jej cyfr: $\frac{10x+y}{x+y}$, gdzie x, y są jednocyfrowe oraz $x \neq 0$, gdyż liczba dwucyfrowa nie może mieć postaci 00,01,….Reszta z dzielenia musi być mniejsza od dzielnika (dlaczego?)Maksymalny dzielnik wynosi 18 (dlaczego?)

Przypuśćmy, że reszta z dzielenia wynosi 17. Wtedy x=y=9, zatem mamy $\frac{99}{18} = 5\frac{9}{18}$ czyli reszta wynosi 9 i sprzeczność.

Przypuśćmy, że reszta wynosi 16 wtedy $x+y$ wynosi 17 lub 18 (dlaczego?) Zatem otrzymujemy trzy liczby 99, 98, 89.
Każda z tych liczb daje przy odpowiednich (jakich?) dzieleniach reszty mniejsze niż 16 (dlaczego?) i sprzeczność.
Przypuśćmy, że reszta wynosi 15, wtedy $x+y$ wynosi 16, 17 lub 18 (dlaczego?)Otrzymujemy sześć liczb do sprawdzenia: 99,98,89,88,97,79.(sprawdź pięć pierwszych z tych liczb)

Dla ostatniej z liczb mamy: $\frac{79}{16} = 4\frac{15}{16}$, czyli największą możliwą resztą z dzielenia liczby dwucyfrowej przez sumę jej cyfr jest liczba 15, co należało uzasadnić.

Zadanie 10.

Niech a_n będzie liczbą zapisaną za pomocą n – jedynek.

Wtedy w sumie $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots a_{100}$ cyfra 1 występuje 10 razy. Uzasadnić.

Dowód:

$a_1 = 1$

$a_2 = 11$

$a_3 = 111$

$a_4 = 1111$

…

$a_{100} = 1111...111$

Dodając pisemnie otrzymamy:

$a_1 + a_2 = 12$

$a_1 + a_2 + a_3 = 123$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1234$

$\cdots$ (sprawdzić)

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{11} = 1234567890 12$

$\cdots$

$a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = 1234567890 1234567890 \cdots 1234567890 1234567890$

W każdej dziesiątce cyfr jest dokładnie jedna jedynka a mamy dokładnie 10 dziesiątek, czyli $10 \cdot 1 = 10$, zatem istotnie mamy 10 jedynek.

Zadanie 11.

Dowieść, że $\sqrt{3-\sqrt{8}} + \sqrt{5-\sqrt{24}} + \sqrt{7-\sqrt{48}} = 1$.

Dowód:

Wyrażenia podpierwiastkowe wystarczy zwinąć w pełny kwadrat i skorzystać ze wzoru na kwadrat różnicy:

$(A-B)^2 = A^2 - 2 \cdot A \cdot B + B^2$.

Mamy kolejno:

$\sqrt{3-\sqrt{8}} = \sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2-2\cdot\sqrt{2}+1} = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2} = \left(\sqrt{2}-1\right)$,

$\sqrt{5-\sqrt{24}} = \sqrt{5-2\cdot\sqrt{6}} = \sqrt{5-2\cdot\sqrt{2\cdot 3}} = \sqrt{3-2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2} = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$,

$\sqrt{7-\sqrt{48}} = \sqrt{7-2\cdot\sqrt{3\cdot 4}} = \sqrt{3-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}+4} = \sqrt{4-2\cdot\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}+3} = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = \left(2-\sqrt{3}\right)$.

$L = \sqrt{3-\sqrt{8}} + \sqrt{5-\sqrt{24}} + \sqrt{7-\sqrt{48}} = \left(\sqrt{2}-1\right) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (2-\sqrt{3}) =$

$(\sqrt{2}-\sqrt{2}) + (\sqrt{3}-\sqrt{3}) + (2-1) = 1 = P$.

Lewa strona równania wyjściowego jest równa prawej, co kończy dowód.

Zadanie 12.

Wyznaczyć wszystkie rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} 25x^2 + 9y^2 = 12yz \\ 9y^2 + 4z^2 = 20xz \\ 4z^2 + 25x^2 = 30xy \end{cases}$$ w liczbach rzeczywistych x, y, z.

Rozwiązanie:

Widzimy, że układ równań nie jest układem równań liniowych. Popróbujemy dodać te równania do siebie, może coś wyjdzie.
Dodając obustronnie równania tego układu otrzymujemy:

$25x^2 + 9y^2 + 9y^2 + 4z^2 + 4z^2 + 25x^2 = 12yz + 20xz + 30xy$

$\rightarrow 50x^2 + 18y^2 + 8z^2 = 12yz + 20xz + 30xy.$

Przenosząc wszystko z prawej strony na lewą otrzymujemy:

$50x^2 - 30xy + 18y^2 - 12yz + 8z^2 - 20xz = 0.$

Grupując sprytnie wyrazy otrzymujemy:

$(25x^2 - 30xy + 9y^2) + (25x^2 - 20xz + 4z^2) + (9y^2 - 12yz + 4z^2) = 0.$

Korzystając ze wzoru na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń otrzymujemy:

$(5x - 3y)^2 + (5x - 2z)^2 + (3y - 2z)^2 = 0.$

Otrzymaliśmy równanie równoważne z układem równań danym w zadaniu.
Załóżmy, że trójka liczb (x, y, z) jest rozwiązaniem danego układu równań.
Wiadomo, że suma kwadratów jest zerem, gdy każdy kwadrat jest zerem (dlaczego?)
Zatem z ostatniego równania mamy:

$5x - 3y = 0, \quad 5x - 2z = 0, \quad 3y - 2z = 0.$

Otrzymujemy: $2z = 5x = 3y.$

Połóżmy w miejsce x, y, z takie liczby, takie aby ostatnie równanie było prawdziwe.
Mamy:

$2 \cdot 15 = 5 \cdot 6 = 3 \cdot 10, \rightarrow 30 = 30 = 30$, zatem x=6, y=10, z=15.

Niech teraz k- oznacza pewną liczbę rzeczywistą. Możemy położyć:

$x = 6 \cdot k, \quad y = 10 \cdot k, \quad z = 15 \cdot k.$ Okazuje się że $30 \cdot k = 30 \cdot k = 30 \cdot k.$

Zatem trójka liczb postaci: $\begin{array}{l} x = 6 \cdot k, \\ y = 10 \cdot k, \\ z = 15 \cdot k, \end{array}$ gdzie $k \in R$ jest rozwiązaniem danego układu równań.

Zadanie 13.
Sprawdzić, że trójka liczb postaci (6k, 10k, 15k) jest rozwiązaniem układu

$$\begin{cases} 25x^2 + 9y^2 = 12yz \\ 9y^2 + 4z^2 = 20xz \\ 4z^2 + 25x^2 = 30xy \end{cases}$$

, gdzie x, y, z są liczbami rzeczywistymi.

Sprawdzenie:
Liczby x=6k, y=10k, z=15k są rzeczywiste bo $k \in R$.
Podstawiając te liczby do równania pierwszego otrzymujemy:

$L = 25 \cdot (6k)^2 + 9(10k)^2 = 25 \cdot 36k^2 + 9 \cdot 100k^2 = 25 \cdot (36k^2 + 9 \cdot 4k^2) = 25 \cdot 2 \cdot 36k^2 =$
$50 \cdot 36k^2 = 1800k^2, P = 12 \cdot 10k \cdot 15k = 120 \cdot 15k^2 = 1800k^2, L = P.$

Podstawiając te same liczby do równania drugiego otrzymujemy:

$L = 9 \cdot (10k)^2 + 4 \cdot (15k)^2 = 900k^2 + 4 \cdot 225k^2 = 1800k^2, P = 20 \cdot 6k \cdot 15k = 1800k^2.$

Podstawiając rozwiązania do równania trzeciego otrzymujemy:

$L = 4 \cdot (15k)^2 + 25 \cdot (6k)^2 = 900k^2 + 25 \cdot 36k^2 = 1800k^2, P = 30 \cdot 6k \cdot 10k = 1800k^2.$

Okazuje się, że równania układu dla liczb x, y, z są tożsamościami, zatem dla każdej liczby rzeczywistej k, liczby x, y, z są rozwiązaniami danego układu.

Zadanie 14.
Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest podzielna przez 8.

Dowód:
Niech $2 \cdot k - 1, 2 \cdot k + 1 -$ dwie kolejne liczby nieparzyste, gdzie $k \in C$.

Wtedy $(2k+1)^2 - (2k-1)^2 = (2k + 1 - (2k-1)) \cdot (2k + 1 + 2k - 1) = (2k + 1 - 2k + 1) \cdot (4k) = 2 \cdot 4k = 8k,$

widać, że prawa strona równania jest podzielna przez 8, więc prawa strona też, gdyż k jest liczbą całkowitą.

Zadanie 15.

W koło o promieniu 10 wybrano 99 punktów. Dowiedziemy, że wewnątrz koła istnieje punkt odległy od każdego z wybranych punktów o więcej niż 1.

Rozwiązanie:

Pole koła o promieniu r=10 wynosi $P = \pi \cdot 10^2 = \pi \cdot 100 = 100\pi$

W kole o tym promieniu wybrano 99 punktów. Ustalmy zbiór wszystkich punktów odległych o co najwyżej 1 od któregokolwiek z wybranych punktów. Zbiór tych ustalonych punktów jest sumą kół o środkach w wybranych punktach i promieniu równym 1. Każde takie koło ma pole równe π, zatem suma tych kół ma pole nie większe niż 99π.

Pole sumy dowolnych figur jest nie większe niż suma ich pól.

Wiemy z treści zadania, że wyjściowe pole koła wynosi 100π, więc istnieją wewnątrz tego koła punkty nienależące do opisanego zbioru, czyli odległe o więcej niż 1 od każdego spośród 99 wybranych punktów.

Zadanie 16.

Wykaż, że różnica sześcianów dwóch kolejnych liczb naturalnych przy dzieleniu przez 6 daje resztę 1.

Dowód:

Oznaczmy przez n, n+1- kolejne liczby naturalne.

Obliczmy sześciany tych liczb:

n^3, $(n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$, ze wzoru na sześcian sumy dwóch wyrażeń.

Różnica sześcianów wynosi:

$(n+1)^3 - n^3 = 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1 = 3 \cdot (n^2 + n) + 1 = 3 \cdot k + 1$, gdzie $k = n^2 + n \in C$, ponieważ lewa strona równania daje resztę 1 więc prawa też.

Zatem zagadnienie rozwiązane.

Zadanie 17.

Znaleźć wszystkie liczby całkowite dodatnie x, które spełniają równanie:

$x^2 + x^3 + x^4 = 3.$

Rozwiązanie:

$x^4 + x^3 + x^2 + x - x - 1 = 3 - 1 \to x^3 \cdot (x+1) + x \cdot (x+1) - (x+1) = 2$

Przenosząc wspólny czynnik przed nawias, otrzymujemy:

$$(x+1) \cdot (x^3 + x - 1) = 2 \to \begin{cases} x + 1 = 2, \\ x^3 + x - 1 = 1. \end{cases}$$

Z uwagi na fakt, że dodatnimi dzielnikami liczby 2 są liczby 2 i 1, mamy:

$$x+1=2 \to x=1, x^3+x-1=1 \to x^3+x=2 \to x\cdot\left(x^2+1\right)=2 \to \begin{cases} x=1 \\ x^2+1=2 \to x=1. \end{cases}$$

Jedyna liczbą całkowitą dodatnią spełniającą równanie $x^2+x^3+x^4=3$ jest liczba x=1.

Zadanie 18.

Udowodnij, że suma trzech kolejnych dowolnych liczb naturalnych jest podzielna przez 3.

Dowód:

Oznaczmy odpowiednio przez

$l_1=n, l_2=n+1, l_3=n+2$ – kolejne dowolne liczby naturalne.

Dodając te liczby otrzymujemy:

$l_1+l_2+l_3=n+n+1+n+2=3\cdot n+3=3\cdot\left(n+1\right)=3m,$ gdzie $m=n+1\in N$, więc suma trzech dowolnych kolejnych liczb naturalnych jest liczbą naturalną podzielną przez 3.

Zadanie 19.

Jaka jest cyfra setek milionów liczby 35!?

Rozwiązanie:

Zdefiniujmy: $n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\dots\cdot 3\cdot 2\cdot 1.$

Z definicji silni mamy: $35!=35\cdot 34\cdot 33\cdot\dots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

Począwszy od liczby 34 co druga jest podzielna przez 2, zatem tych liczb jest 17, ponadto mamy wielokrotności liczby 2: $2^2=4, 2^3=8, 2^4=16, 2^5=32,$ czyli dodatkowo mamy kolejne dwójki. (Ile jest wszystkich dwójek?) Ponadto co piata liczba jest podzielna przez 5. Wśród liczb podzielnych przez 5 mamy dokładnie siedem 5 (dlaczego?), oraz dodatkowo jedna piątka gdyż $5^2=25.$ Zatem wszystkich piątek jest dokładnie 8. Licz 2 jest dużo więcej, zatem do każdej piątki możemy dorzucić dwójkę. Zauważmy, że $10=2\cdot 5,$ więc

$10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10\cdot 10=10^8=100000000.$

Otrzymujemy: $35!=X00000000,$ gdzie X- oznacza cyfry naszej liczby przed zerem. Zatem cyfrą setek milionów jest zero.

Zadanie 20.

Ile jest palindromów trzyznakowych utworzonych z liter {A,B,C,D,E}?

Rozwiązanie:

AAA, ABA, ACA, ADA, AEA
BBB, BAB, BCB, BDB, BEB
CCC, CAC, CBC, CDC, CEC

DDD, DAD, DBD, DCD, DED
EEE, EAE, EBE, ECE, EDE
Jak widać w każdym wierszu i każdej kolumnie występuje po 5 palindromów, czyli jest dokładnie $5 \cdot 5 = 25$ palindromów.

Zadanie 21.
Ile jest wszystkich trzycyfrowych liczb palindromicznych utworzonych ze wszystkich cyfr układu dziesiętnego?
Rozwiązanie:
Szukamy tych liczb ze zbioru cyfr $\{0,1,2,\dots,9\}$.
Układy typu 000,010, itp. odpadają gdyż nie są liczbami.

$$\begin{matrix} 101 & 202 & \cdots & 909 \\ 111 & 212 & \cdots & 919 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 191 & 292 & \cdots & 999 \end{matrix}$$

W każdym wierszu występują na początku i końcu liczb cyfry od 1 do 9, zaś w każdej kolumnie liczby o środkowych cyfrach od 0 do 9. Zatem jest dokładnie $9 \cdot 10 = 90$ trzycyfrowych liczb palindromicznych.
Zadanie 22.
Ile jest wszystkich palindromów pięciocyfrowych?
Rozwiązanie:
Oznaczmy przez l- liczbę utworzoną z n – cyfr. Na przykład przez l=9 oznaczać będziemy liczbę dziewięciocyfrową.
Dla l=2 mamy dokładnie 9 palindromów:11,22,33,44,55,66,77,88,99.
Dla l=3 mamy dokładnie 90 palindromów (zadanie 2)
Dla l=4 mamy również 90 palindromów.
Uzasadnienie:

$$\begin{matrix} 1001 & 2002 & \cdots & 9009 \\ 1111 & 2112 & \cdots & 9119 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1991 & 2992 & \cdots & 9999 \end{matrix}$$

W każdym wierszu jest dokładnie dziewięć liczb, zaś w każdej kolumnie jest ich dokładnie dziesięć, więc wszystkich palindromów czterocyfrowych jest dokładnie $9 \cdot 10 = 90$.
Dla l=5 palindromów mamy dokładnie 900. Dlaczego?

Każda liczba palindromiczna pięciocyfrowa jest postaci:

$1abc1 \quad 2abc2 \quad \cdots \quad 9abc9$

Wszystkich liczb tej postaci jest dokładnie dziewięć.

Zauważmy, że liczb palindromicznych trzycyfrowych $\overline{abc}$ jest dokładnie 90 (zadanie 2). Pozostały symbole postaci 000, 010,020,030,040,050,060,070,080,090, czyli dokładnie jest ich 10.

Zatem w każdym wierszu mamy 9 liczb, zaś w każdej kolumnie dokładnie 90+10=100 liczb. Ostatecznie wszystkich liczb palindromicznych pięciocyfrowych jest $9 \cdot 100 = 900$.

Zadanie 23.

Ile jest wszystkich palindromów pięciocyfrowych w systemie dwójkowym?

Rozwiązanie:

Tworzymy liczby palindromiczna ze zbioru $\{0,1\}$

W systemie dwójkowym istnieje dokładnie jedna dwucyfrowa liczba palindromiczna 11, gdyż 00 nie jest liczbą.

Liczb palindromicznych trzycyfrowych jest dokładnie dwie: 111, 101 (dlaczego nie ma więcej?) Podobnie liczb palindromicznych czterocyfrowych jest 2, mianowicie 1111,1001.

Liczb pięciocyfrowych jest dokładnie 4: 11111,11011,10001,10101.

Zadanie 24.

Czy liczby pięciocyfrowe palindromiczne w systemie dwójkowym są palindromami w systemie dziesiętnym?

Rozwiązanie:

Zamieńmy liczby z systemu dwójkowego na dziesiętny:

$11111 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$

$11011 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 8 + 0 + 2 + 1 = 27$

$10001 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 0 + 0 + 0 + 1 = 17$

$10101 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 16 + 0 + 4 + 0 + 1 = 20$

Widzimy, że liczby 31, 27, 17 oraz 20 nie są palindromami w systemie dziesiętnym.

4. Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1. Ile jest wszystkich palindromów sześciocyfrowych?
Zadanie 2. Ile jest wszystkich liczbowych palindromów siedmiocyfrowych.
Zadanie 3. Ile jest wszystkich liczbowych palindromów sześciocyfrowych w systemie dwójkowym?
Zadanie 4. Ile jest wszystkich liczbowych palindromów siedmiocyfrowych w systemie dwójkowy
Zadanie 5. Jaka jest cyfra dziesiątek milionów liczby 30!
Zadanie 6. Udowodnij, że iloczyn dowolnej liczby parzystej i nieparzystej jest liczbą parzystą.
Zadanie 7. Udowodnij, że iloczyn dwóch liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą
Zadanie 8. Jaka jest suma cyfr liczby $10^{2008} - 2008$?
Zadanie 9. Która jest godzina, jeśli do końca doby pozostało jeszcze $\frac{2}{3}$ tego co już upłynęło
Zadanie 10. Uzasadnić, że prostokąt o polu 25 ma obwód równy co najmniej 20.
Zadanie 11. Uzasadnić, że prostokąt o obwodzie równym 25 ma pole równe co najwyżej 62.
Zadanie 12. Danych jest pięć liczb rzeczywistych o tej własności, że suma każdych trzech z nich jest dodatnia. Czy suma wszystkich pięciu liczb jest dodatnia? Jeśli tak to uzasadnij, jeśli nie to podaj przykład.
Zadanie 13. Dlaczego kwadrat dowolnej liczby rzeczywistej jest liczbą nieujemną? Uzasadnij.
Zadanie 14. Uzasadnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność $\frac{a^4+b^4+c^4}{a+b+c} \geq a \cdot b \cdot c$.
Zadanie 15. Czy prawdziwa jest nierówność postaci $x^2 + y^2 \geq x + y$, dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y?
Zadanie 16. Uzasadnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c, d, e zachodzi nierówność postaci

$$5 \cdot \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e} \leq \frac{a+b+c+d+e}{5}.$$