Elementy rachunku prawdopodobieństwa

Opracowanie: Zbigniew Stebel

A. Podstawowe pojęcia

Definicja 1.
Niepustą rodzinę T podzbiorów zbioru Ω ,która spełnia warunki
A) $A \in \mathrm{T} \Rightarrow A' \in \mathrm{T}$
B) jeśli $A_n \in \mathrm{T} \Rightarrow \bigcup_n^{\infty} A_n \in \mathrm{T}, n = 1,2,\ldots,$ nazywamy $\sigma -$ **ciałem**.

Przykład:
Niech $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$. Sprawdź, czy następujące rodziny podzbiorów Ω :
1. $\mathrm{T}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{3\}\}$,
2. $\mathrm{T}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{1,2,3\}, \{3,4,5\}\}$

tworzą σ -ciała. Jeśli nie tworzą to uzupełnij te rodziny w sposób minimalny, aby otrzymać σ -ciała.
Ad(1)
$A \in \mathrm{T}_1 \Rightarrow A' = \{\emptyset, \Omega, \{3\}, \{1,2,4,5\}\}$
$A, A' \in \mathrm{T}_1 \Rightarrow A \cup A' \in \mathrm{T}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{3\}, \{1,2,4,5\}\}$,zatem do rodziny T_1 należy dodać zbiór $\{1,2,4,5\}$.
Ad(2)
$A \in \mathrm{T}_2 \Rightarrow A' = \{\emptyset, \Omega, \{1,2,3\}, \{4,5\}, \{3,4,5\}, \{1,2\}\}$
$A, A' \in \mathrm{T}_2 \Rightarrow A \cup A' = \{\emptyset, \Omega, \{1,2,3\}, \{4,5\}, \{3,4,5\}, \{1,2\}\}$,zatem do rodziny T_2 należy dodać $\{4,5\}, \{1,2\}$.

Definicja 2.
Funkcję rzeczywistą P określoną na podzbiorach przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω tworzących $\sigma-$ciało T o własnościach
(P1) $P(A) \geq 0$
(P2) jeśli $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j,$ to $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$
(P3) $P(\Omega) = 1$
nazywamy **prawdopodobieństwem**.
Trójkę (Ω, T, P) nazywamy **przestrzenią probabilistyczną**, zaś warunki (P1),(P2),(P3) **aksjomatami prawdopodobieństwa**.

B. Własności prawdopodobieństwa.

1. **Monotoniczność**

(1) Jeśli $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Dowód:

Załóżmy, że $A \subset B$.

Wtedy $B = A \bigcup (B \setminus A)$, przy czym $A \bigcap (B \setminus A) = \emptyset$. Zatem z aksjomatu (P2) otrzymujemy $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$.

Na podstawie aksjomatu (P1) otrzymujemy $P(B \setminus A) \geq 0 \Rightarrow P(B) - P(A) \geq 0 \Rightarrow P(B) \geq P(A)$, czyli otrzymaliśmy nierówność $P(A) \leq P(B)$.

2.

(2) $P(A') = 1 - P(A)$.

Dowód:

Zauważmy, że

(x) $P(B \setminus A) = P(B) - P(A) \geq 0.$

Przyjmijmy w tej nierówności $B = \Omega$, wtedy otrzymamy $P(\Omega \setminus A) = P(A') = P(\Omega) - P(A) \geq 0$ .Z aksjomatu (P3) otrzymujemy $P(A') = 1 - P(A)$.

3.

(3) $P(A) \leq 1.$

Dowód:

Nierówność (4) jest szczególnym przypadkiem nierówności (3). Podstawmy w (x) $B = \Omega$, otrzymujemy $P(\Omega) - P(A) \geq 0$, stąd na mocy aksjomatu (P3) mamy $1 - P(A) \geq 0 \Rightarrow P(A) \leq 1.$

4.

(4) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Dowód:

Dla dowolnych zdarzeń A, B mamy $A \bigcup B = A \bigcup (B \setminus (A \bigcap B))$,gdzie $A \bigcap (B \setminus (A \bigcap B)) = \emptyset$. Na mocy aksjomatu (P2) otrzymujemy $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B \setminus (A \bigcap B))$. Na podstawie (x) otrzymujemy $P(A \bigcup B) = P(A) + P(B) - P(A \bigcap B)$, ponieważ $A \bigcap B \subset B$.

5. **Nierówność Boole'a.**

$$(5)\qquad P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Dowód (indukcyjnie)

Dla n=2 nierówność wynika bezpośrednio z (4), oraz z faktu że $P(A \cap B) \ge 0$.

Załóżmy prawdziwość (5) dla pewnego $n \ge 2$ dowolnie ustalonego, gdzie $n \in N$.

Uzasadnimy prawdziwość nierówności dla $n+1$-szej liczby naturalnej (teza indukcyjna)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i) + P(A_{n+1}) - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}\right) \le \sum_{i=1}^{n+1} A_i \text{, gdyż } P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap A_{n+1}\right) \ge 0.$$

Udowodniliśmy prawdziwość nierówności dla $n+1$-szej liczby naturalnej w oparciu o założenie indukcyjne i własności (4). Zatem zasada indukcji matematycznej kończy dowód tej nierówności.

C. Prawdopodobieństwo warunkowe i niezależność zdarzeń

Rozważmy **przestrzeń probabilistyczną** $(B, \mathrm{T}_B, P(\cdot / B))$, gdzie $B \subset \Omega, P(B) > 0,$ oraz $\mathrm{T}_B = \{A \bigcap B, A \in \mathrm{T}\}$ mamy

Definicja 3.

(6) $$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, A \in \mathrm{T}.$$

Wyrażenie dane równaniem (6) nazywamy prawdopodobieństwem A pod warunkiem B. Z równania (6) wynika wzór na prawdopodobieństwo iloczynu zdarzeń A i B:

(7) $$P(A \cap B) = P(A \backslash B) \cdot P(B), P(B) > 0.$$

Uogólnienie wzoru (7) dla dowolnych n zdarzeń.

Niech $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) > 0$. Wtedy zachodzi wzór:

(8) $$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_n \backslash A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_{n-1} \backslash A_1 \cap \ldots \cap A_{n-2}) \ldots P(A_2 \backslash A_1) \cdot P(A_1).$$

Pojęcie rozbicia

Załóżmy, że $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, P(B_i) > 0, B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j.$ Mówimy wtedy, że ciąg zdarzeń $\{B_i, i = 1,2,\ldots,n\}$ tworzy rozbicie, czyli układ zupełny przestrzeni Ω.

Ćwiczenie 1

Podaj i uzasadnij wzór **na prawdopodobieństwo całkowite**

Jeśli ciąg zdarzeń $\{B_i, i = 1,2,\ldots,n\}$ tworzy rozbicie przestrzeni Ω, to dla dowolnego zdarzenia $A \in \mathrm{T}$ zachodzi wzór

(9) $$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \backslash B_i) \cdot P(B_i).$$

Dowód:

Dla dowolnego zdarzenia A:

$P(A) = P(A \cap \Omega) = P\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A \backslash B_i) \cdot P(B_i).$ Trzecia równość wynika z prawa rozdzielności mnożenia względem dodawania zdarzeń, czwarta równość z aksjomatu (P2), piąta z relacji (7).

Z pojęciem warunkowego prawdopodobieństwa wiąże się **wzór Bayesa.**
Ćwiczenie 2.
Podaj i uzasadnij **wzór Bayesa** (wzór na **prawdopodobieństwo przyczyny**)
Dla dowolnego zdarzenia $A \in T$ dla którego $P(A) > 0$ zachodzi wzór

(10) $$P(B_i \setminus A) = \frac{P(A \setminus B_i)\cdot P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \setminus B_i)\cdot P(B_i)},\ \text{gdzie } i \in N.$$

Dowód:
Na mocy relacji (6) i (7) oraz (9) otrzymujemy

$$P(B_i \setminus A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A \setminus B_i)\cdot P(B_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \setminus B_i)\cdot P(B_i)}.$$

Definicja 4.
Dwa zdarzenia A i B są niezależne, wtedy gdy zachodzi równanie:

(11) $P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B)$

Definicja 5. (niezależności rodziny zdarzeń)
Niech Γ będzie dowolną rodziną zdarzeń i załóżmy, że $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ jest podrodziną zdarzeń z Γ. Jeśli spełniony jest warunek

(12) $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i),$ to rodzinę tę nazywamy **rodziną zdarzeń niezależnych**.

Uwaga:
Niezależność zdarzeń określona relacją (12) jest własnością silniejszą niż niezależność parami zdarzeń określonej relacją (11).

D. Zadania

1. Rzucamy trzema kostkami do gry. Oblicz prawdopodobieństwo jednakowej liczby oczek na dokładnie dwóch kostkach.

Rozwiązanie:

Ω - rzut trzema kostkami do gry, $\Omega = \{(x, y, z), x, y, z \in \{1,2,3,4,5,6\}\}$

Przestrzenią zdarzeń elementarnych są 3-elementowe wariacje z powtórzeniami zbioru 6-cio elementowego, liczność tej przestrzeni wynosi dokładnie $|\Omega| = n^k = 6^3$.

A- zdarzenie, polegające na wylosowaniu jednakowej liczby oczek na dokładnie dwóch kostkach

$A = \{(1,2,2),(1,3,3),(1,4,4),(1,5,5),(1,6,6),(2,1,2),(3,1,3),(4,1,4),(5,1,5),(6,1,6),(2,2,1),(3,3,1),(4,4,1),(5,5,1),(6,6,1),\ldots\}$

$|A| = 15 \cdot 6 = 90$

Korzystając z **klasycznej definicji prawdopodobieństwa** otrzymujemy $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{15 \cdot \cancel{6}}{6^2 \cdot \cancel{6}} = \frac{\cancel{3} \cdot 5}{6 \cdot 2 \cdot \cancel{3}} = \frac{5}{12}$

2. Z urny zawierającej 16 kul czarnych i 2 białe losujemy m kul (bez zwracania). Podaj najmniejszą wartość liczby m, dla której prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz kuli białej jest większe od $\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie:

Ω -to są m-elementowe kombinacje bez powtórzeń zbioru 18-to elementowego, $|\Omega| = C_{18}^m = \binom{18}{m}$.

A' -zdarzenie przeciwne: zdarzenie polegające na otrzymaniu wszystkich kul czarnych, są to m –elementowe kombinacje bez powtórzeń zbioru 16-to elementowego, $|A| = C_{16}^m = \binom{16}{m}$.

$P(A')$- prawdopodobieństwo otrzymania w losowaniu wszystkich kul czarnych.

$P(A')=\frac{|A'|}{|\Omega|}=\frac{\binom{16}{m}}{\binom{18}{m}}$. Zatem poszukiwane prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz kuli białej liczymy ze wzoru $P(A)=1-\frac{\binom{16}{m}}{\binom{18}{m}}$.

$1-\frac{\binom{16}{m}}{\binom{18}{m}}\geq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\binom{16}{m}}{\binom{18}{m}}\leq\frac{1}{2}$. Dla $m\geq 6$ ostatnia nierówność jest prawdziwa, co łatwo sprawdzić.

3. Podać i udowodnić nierówność Boneferroniego.
   Rozwiązanie:
   $P(A\cap B)\geq P(A)+P(B)-1$
   Dowód:
   Zauważmy, że $0\leq P(A\cup B)\leq 1$, stąd i z własności prawdopodobieństwa (4) otrzymujemy nierówność równoważną postaci
   $0\leq P(A)+P(B)-P(A\cap B)\leq 1\Rightarrow P(A)+P(B)-1\leq P(A\cap B)$, co było do udowodnienia.

4. Wiedząc, że 50% studentów zaliczyło wykład A, 40%-wykład B, 30%-wykład C, 35% wykłady A i B, 20% wykłady B i C, 25% wykłady A i C oraz 15% - wszystkie trzy wykłady, podaj ile procent studentów zaliczyło co najmniej jeden z wykładów.

   Rozwiązanie:
   $P(A)=50\%, P(B)=40\%, P(C)=30\%, P(A\cap B)=35\%, P(B\cap C)=20\%, P(A\cap C)=25\%, P(A\cap B\cap C)=15\%$
   Stosując wzór na prawdopodobieństwo sumy trzech dowolnych zdarzeń otrzymujemy
   $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)=$
   $=50\%+40\%+30\%-35\%-20\%-25\%+15\%=55\%$
   Co najmniej jeden z wykładów zaliczyło dokładnie 55% studentów.

5. Student dojeżdża na zajęcia rowerem raz na dwa dni, autobusem raz na trzy dni oraz tramwajem raz na sześć dni. Jeśli jedzie rowerem, spóźnia się raz na 60 przypadków, jeśli autobusem- raz na 20 przypadków, jeśli tramwajem- raz na 10 przypadków. Jakie jest prawdopodobieństwo spóźnienie się studenta ?

Rozwiązanie:

R- zdarzenie, że student dojeżdża na zajęcia rowerem

A- zdarzenie, że dojeżdża autobusem

T- zdarzenie, że dojeżdża tramwajem

$$P(R)=\frac{1}{2}, P(A)=\frac{1}{3}, P(T)=\frac{1}{6}$$

$P(S)$- prawdopodobieństwo spóźnienia się studenta na zajęcia

$$P(S \setminus R)=\frac{1}{60}, P(S \setminus A)=\frac{1}{20}, P(S \setminus T)=\frac{1}{10}$$

Korzystając ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite (9) otrzymujemy

$$P(S)=P(S \setminus R)\cdot P(R)+P(S \setminus A)\cdot P(A)+P(S \setminus T)\cdot P(T)=$$

$$=\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{120}+\frac{1}{60}+\frac{1}{60}=\frac{5}{120}=\frac{1\cdot\cancel{5}}{24\cdot\cancel{5}}=\frac{1}{24}.$$

Prawdopodobieństwo spóźnienia się studenta na zajęcia wynosi $\frac{1}{24}$.

6. W hotelu znajdują się dwie windy I i II, przy czym I działa z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$, II działa z prawdopodobieństwem $\frac{1}{3}$, a jeśli nie działa II, to I nie jest zepsuta z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$.
   A) Jakie jest prawdopodobieństwo, że działa II, gdy I jest zepsuta?
   B) Jakie jest prawdopodobieństwo, że działa co najmniej jedna z wind ?

Rozwiązanie:

Z treści zadania wynika, że

$$P(A)=\frac{1}{2}, P(A')=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{3}, P(B')=\frac{2}{3}, P(A \setminus B')=\frac{1}{2}.$$

Ad(A)

$$P(B \setminus A') = \frac{P(B \cap A')}{P(A')} = \frac{P(B) - P(A \cap B)}{P(A')} = \frac{P(B) - [P(A) - P(A \cap B')]}{P(A')} =$$

$$\frac{P(B) - [P(A) - P(A \setminus B') \cdot P(B')]}{P(A')} = \frac{\frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Ad(B)

Ponieważ $A \cap (A \cap B') = \emptyset$, więc sumę zdarzeń możemy przedstawić w postaci

$$P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap B') = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

7. Sformułuj i udowodnij wzór na prawdopodobieństwo sumy trzech dowolnych zdarzeń

Dla dowolnych zdarzeń A,B i C zachodzi wzór:

(13) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$

Dowód:

Z własności (4) prawdopodobieństwa oraz rozdzielności mnożenia względem dodawania dla działań na zbiorach i zdarzeniach otrzymujemy

$$P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)) =$$

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(C) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P((A \cap C) \cap (B \cap C)) =$$

$$= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Literatura

1. Cacoullos, T. (1980) Exercises in Probability. Springer-Verlag, New York.
2. Bremaud, P. (1988) An Introduction to Probabilstic Modeling. Springer-Verlag, New York.